- **Corrigé Problème 7**

Partie A *: Etude du signe de* $g(x)=x^3-1+2\ln x$

1. La fonction g est dérivable sur]0 ; + ∞[: $g'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x}$

donc la fonction g est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.

2. Tableau de variation de la fonction *g*.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+
$g(x)$	‖	↗

3. $g(1)=1-1+2\ln 1=0$

4. Si $x\le 1$, alors $g(x)\le g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x)\le 0$

Si $x\ge 1$, alors $g(x)\ge g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x)\ge 0$

conclusion : sur]0 ; 1] , $g(x)\le 0$ et sur [1 ; + ∞[, $g(x)\ge 0$.

On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	+	

***Partie B* :**

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[par : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1.a $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x-1=-1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$ (voir formulaire) et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

De la dernière limite, on en déduit que la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

1.b $f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$;donc la droite (*D*) d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à (*C*) au voisinage de $+\infty$ .Il y a une autre asymptote à la courbe(C) (voir 1.a.) , c'est la droite d'équation $x=0$.

1.c $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$; $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln x}{x^4}=1-\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=1-\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$; $f'(x)=\dfrac{x^3-1+2\ln x}{x^3}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

1.d $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $x^3>0$ sur]0 ; + ∞[et le signe de $g(x)$ a déjà été trouvé à la partie A : $f(1)=0$

1.e Soit *x* l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote (*D*) et de la courbe (C) , on a : $f(x)=x-1$ soit $\ln x=0$, par conséquent $x=1$. l'ordonnée de ce point est $f(1)=0$.

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point de coordonnées (1 ; 0) . $f(x)-(x-1)$ est du signe de $-\ln x$ (voir Partie B 1 .b)

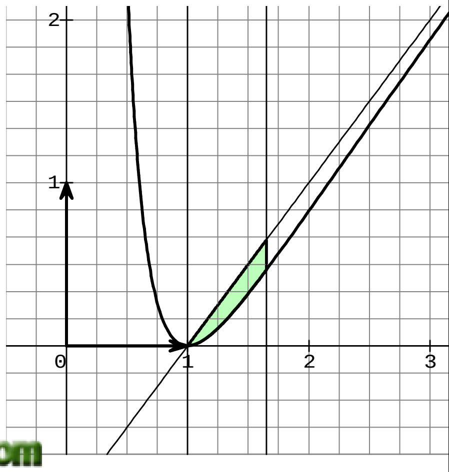
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Etudions le signe de $-\ln x$:

$-\ln x \geq 0$ si $\ln x \leq 0$ soit $\ln x \leq \ln 1$ d'où $x \leq 1$

sur $]0 ; 1]$, $-\ln x \geq 0$ donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D)

sur $[1 ;+\infty[$, $-\ln x \leq 0$ donc la courbe (C) est au dessous de la droite (D)



1. C_f voir graphique

2.a pour tout réel x on a : $H'(x) = \frac{1}{x^2}(1+\ln x) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+\ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = h(x)$

donc H est une primitive de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$

2.b $H(\sqrt{e}) = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\ln\sqrt{e}\right) = \frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2}\ln e\right) = \frac{-3}{2\sqrt{e}}$ $\quad H(1) = -\left(1+\ln 1\right) = -1$,

$H(\sqrt{e}) - H(1) = \frac{-3}{2\sqrt{e}} + 1$