Problème 7

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$. ($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction *g*. (Les limites ne sont pas demandées). Calculer $g(1)$.
3. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B : On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.(unités :3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1.a Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

1.b Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.

Y a-t-il une autre asymptote à $(\mathcal{C})$? Si oui, donner son équation.

1.c Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

1.d En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

1.e Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe $(\mathcal{C})$.

Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D).

1.f Tracer dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (D).