

Exercices de synthèse

Problème 1

Partie A Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

- Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
- Soit g' la dérivée de g . Montrer que : $g'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x}$, puis dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.
- Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$. On appelle (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 3 cm).

- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Déterminer la limite de f en 0 ; on remarquera que : $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$. Que peut-on en déduire ?
- Montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
 - En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$. Donner les solutions dans l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.
- Tracer (C_f) et la droite d'équation $y = x$.
- Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

- Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
 - Hachurer le domaine (D).
 - Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm^2 . On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près

Problème 2

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (L'unité graphique est 2 cm). Le but du

problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$ puis de calculer une aire.

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 4 + 2\ln x$.

- Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g .
- Déterminer le sens de variation de la fonction g . (On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$.)
- Démontrer que sur l'intervalle $[1; 2]$ l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α .

- b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α .
4. Dédurre de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x , dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

II) Etude de la fonction f

- Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
- a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C_f ?.
- c. Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe et à la droite D.
- d. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite D.

3. Etude des variations de f .

- a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f . Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.
- b. En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f
4. On note T la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse e^2 . Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.
5. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite D, la tangente T et la courbe C_f à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha) = 1,25$)

III) Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction H par : $H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$

- Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Soit E la région du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
- a. Hachurer la région E sur votre figure.
- b. On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région E. Déterminer la valeur exacte de S.
- c. Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 .

Problème 3

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan P. On note $\ln$ la fonction logarithme népérien.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g .

- Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$

- on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Sachant que la courbe C_f passe par le point de coordonnées (1; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b .

Partie C : Etude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b. Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.
a. Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C_f .
b. Etudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite D .
- c. Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2 , de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H .
a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$
2. Calculer A . Donner la valeur de A , arrondie au mm^2 .

Problème 4

Sur la feuille annexe, qui doit être remise avec la copie, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

Partie A : détermination de la fonction f

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3; -\frac{7}{2} + 3\ln 2\right)$.

La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe C_f . On note f' la fonction dérivée de f .

1. Quelle est la valeur exacte de $f(3)$?
2. Donner sans justification la limite de la fonction f en 2.
3. On suppose que, pour tout réel x de l'intervalle $]2; +\infty[$, $f(x) = ax - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$
En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre a .

Partie B : étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$

1. a. Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 2.
b. Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle $]2; +\infty[$ $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$
c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$. Tracer Δ sur la feuille annexe.
3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]2; +\infty[$ $f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}$
b. étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

- c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2, 1; 3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9; 10]$.
- b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β .

Partie C : calcul d'aire

On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par $h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ et

$$H(x) = (x-1)\ln(x-1) - (x-1)\ln(x-2).$$

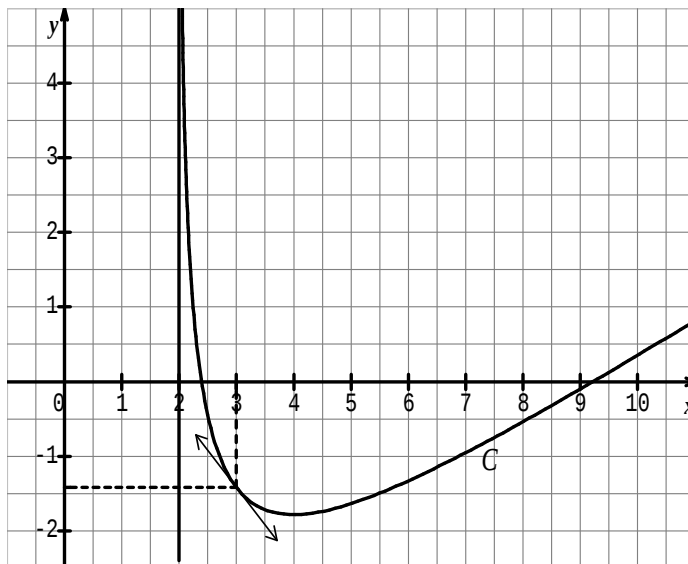
a-Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

2. On considère le domaine D du plan compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 9$. Hachurer le domaine D sur le graphique de la feuille annexe.

b. On note A la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine D . Exprimer A sous la forme d'une intégrale.

c. Calculer la valeur exacte de A , puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.



Problème 5

On note I l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I , par :

$$f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

(unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées $(1; -3)$.

Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe C_f passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I , par : $f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x de I , on a $f(x) = x \left(x - \frac{4}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right)$.

b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f puis montrer que, pour tout nombre réel x de I , on a

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I .

5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

6. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I , par : $H(x) = x \ln x - x$.

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H .

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur I .

3. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. Hachurer Δ . Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm^2 .