Fomesoutra.com
ça soutra !

Problème 11

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire ***A*** du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

On note *M* et *N* les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, *P* et *Q* leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que *f* est positive sur $[1;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (*MN*) est $2\ln 2$.

c. Soit *E* le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1;2]$, le point *E* est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (*MN*).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point *E*. montrer qu'une équation de (T) est :

$y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$.

2. Soit *g* la fonction définie sur $[1;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout *x* de $[1;2]$.

b. Etudier les variations de *g* sur $[1;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient *M*' et *N*' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (*MN*) sur l'intervalle $[1;2]$ et que les points *M*' et *N*' ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes *MNQP* et *M'N'QP*.

b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de ***A*** d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de ***A***.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

2. En déduire la valeur exacte de ***A***.

Problème 12

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique:1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire *g* définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+2-2\ln x$

a) Étudier le sens de variation de *g* et calculer *g*(1).

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout *x* de $]0;+\infty[$.

2. *a)* Calculer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) et étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

d) Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) sachant que (C_f) admet en A une tangente T parallèle à (D).

e) Tracer (C_f) (C), (D) et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par (D), la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Problème 13

Partie A

Étude de la fonction *f* définie sur R^{+*} par : $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

On appellera C sa courbe représentative.

1. Étudier la limite de *f* en $+\infty$.

Étudier la limite de *f* en 0.

Étudier les variations de *f* ; en dresser le tableau de variations.

2. Déterminer la valeur de *x* telle que $f(x) = 0$.

Écrire l'équation de la tangente T à C en ce point.

3. Tracer C et T.

Partie B

1. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$.

En déduire l'ensemble des primitives F de *f*.

2. Déterminer la primitive de *f* qui s'annule pour $x = 1$.

Cette primitive sera appelée F_1.

Déduire de la partie A le sens de variation de F_1 ; déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, dresser le tableau de variations et donner les intersections de la courbe représentative de F_1 avec $x'Ox$

Représenter graphiquement F_1.

3. On appelle F_2 la primitive de *f* qui prend la valeur 0,5 pour $x = 1$. Donner l'expression de F_2.

Expliquer la construction de la courbe représentative de F_2 à partir de celle de F_1. Tracer la courbe représentative de F_2.

Problème 13

Première partie On considère la fonction numérique *f* définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x.\ln\frac{x+2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.a. Montrer que *f* est continue en 0.

b. *f* est-elle dérivable en 0 ?

c. On pose $h = \frac{2}{x}$ avec $(x > 0)$. Trouver la limite de *f* quand *x* tend vers $+\infty$.

2.a. Pour $x>0$ calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et vérifier que $f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$.

b. Etudier le sens de variation de $f'(x)$, et trouver la limite de $f'(x)$ quand *x* tend vers +∞. En déduire le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de $f(x)$

3. On appelle C la courbe représentative de $f(x)$ (unités : 4 cm). Tracer C en indiquant la tangente en O et au point A d'abscisse 2.

4. Soit u la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{2x}{x+2}$ et H sa représentation graphique dans le même repère que C.

a. Dresser le tableau de variation de *u* et vérifier que pour tout *x>0* on a $f(x)-u(x)=x.f'(x)$

En déduire la position relative de C et H. Tracer H en indiquant le point B d'abscisse 2.

b. λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à C au point d'abscisse λ rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée *u*(λ). En déduire à l'aide du tracé de H la construction de la tangente à C au point d'abscisseλ. Indiquer la construction ainsi de la tangente à C au point A.

Deuxième partie On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g, définies et dérivables sur $[0,+\infty[$ et possédant la propriété suivante P : $g(x)-x.g'(x)=\dfrac{2x}{x+2}$

g étant définie et dérivable sur]0, +∞[on pose $G(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

1. Montrer que g possède la propriété P si et seulement si $G'(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x}$

2. En déduire l'ensemble (E).

Problème 14

Soit la fonction définie sur l'intervalle $I=[4;+\infty[$ par :

$f(x)=-2x+5+3\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1. Étude de *f*

a) Étudier les limites de la fonction *f* aux bornes de I.

b) Montrer que sur I, $f'(x)$ est strictement négatif et dresser le tableau de variation de *f*.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y=-2x+5$ est une asymptote à (C_f).

Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) .

2. Tracer la courbe (C_f) et la droite (D) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. Déterminer les coordonnées du point de (C_f) où la tangente (T) a un coefficient directeur égal à $-\dfrac{9}{2}$. Donner une équation de (T) et la tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4. Calcul d'aire

a) Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto \ln x$

b) Montrer que la fonction $G(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de la fonction $g(x)=\ln(x+1)$ sur I.

c) Montrer que la fonction $H(x)=(x-4)\ln(x-4)-x$ est une primitive de la fonction $h(x)=\ln(x-4)$ sur I.

d) Déduire des questions précédentes le calcul de l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations respectives. $x=5$ *et* $x=6$.

On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

5. Intersection de (C) et de l'axe des abscisses

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans I une unique solution, notée x_0.

b) Déterminer graphiquement un encadrement de x_0 d'amplitude 0,5.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}.

On explicitera la méthode employée.

Partie B

Calcul d'intégrales

Pour tout réel *a* de l'intervalle] 0 ; 1] on pose :

$I(a)=\int_a^1 f(x)\,dx$ et $J(a)=\int_a^1 g(x)\,dx$.

1. Calculer l'intégrale I(*a*) en fonction de *a*.

À cet effet, on pourra remarquer que *f*(*x*) peut s'écrire : *f*(*x*) = $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer J(*a*) en fonction de *a*.

3. *a)* Calculer : $\lim_{a\to 0}(I(a)-J(a))$. [On admettra que $\lim_{x\to 0}(x^2\ln x)=0$.]

b) Donner une interprétation géométrique de cette limite

Problème 15

a. La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$

En utilisant les variations de g, déterminer son signe suivant les valeurs de x.

b. La fonction numérique f est définie sur]0,+∞[par $f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$

1. Déterminer les limites de f en 0 et +∞ (en +∞, on pourra poser $X=\sqrt{x}$).
2. Utiliser la première partie pour déterminer le sens de variation de f.
3. a. Soit (Δ) la droite d'équation $y=x-1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que (Δ) est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. Les construire.

4-a-Déterminer la dérivée de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=6\sqrt{x}\ln x$

b- En déduire la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.