Problème 16

a. La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$
En utilisant les variations de g, déterminer son signe suivant les valeurs de x.
b. La fonction numérique f est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ (en $+\infty$, on pourra poser $X = \sqrt{x}$).
2. Utiliser la première partie pour déterminer le sens de variation de f.
3. a. Soit (Δ) la droite d'équation $y = x - 1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que (Δ) est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. Les construire.

4-a-Déterminer la dérivée de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = 6\sqrt{x}\ln x$
b- En déduire la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Problème 17

Partie A

Soit f l'application définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 4 + \dfrac{\ln x}{4}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$.

Justifier que (C_f) admet une asymptote et en donner une équation.

2. *a)* Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $[3;4]$.

c) Tracer (C_f).

3. Soit D le domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.

a) Calculer, pour $x > 0$, la dérivée de $x \mapsto x\ln x$.
b) En utilisant le résultat du *a)*, exprimer l'aire en cm² du domaine D à l'aide d'un polynôme du second degré en x.

Partie B

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[3;4]$.

1. Soit g l'application définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 4 - \dfrac{\ln x}{4}$.

a) Montrer que α est solution de l'équation : $g(x) = x$.

b) Montrer que l'image de l'intervalle I par g est incluse dans I.

c) Montrer que, pour tout élément x appartenant à I : $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{12}$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$

a) En utilisant B)**1.** *b)*, montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, u_n est élément de I.

b) Prouver que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{12}|u_n - \alpha|$

En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n : $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{12^n}$.

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$?

c) Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'inéquation : $\frac{1}{12^x} \leq 10^{-3}$

En déduire que u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Problème 18

Question de cours : soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient *u* et *v* deux fonctions continues, dérivables sur *I* telles que les fonctions dérivées *u*' et *v*' soient continues sur *I*.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle [*a* ; *b*] de *I*.

Partie A

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;1]$. On note f' la fonction dérivée de *f*.

On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que $\int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx$.

2. En déduire que $\int_0^1 [f(x) - f(1)]dx = -\int_0^1 xf'(x)dx$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme népérien.

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]-2;2[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Montrer que pour tout réel *x* de l'intervalle $]-2;2[$, on a $f'(x) = \frac{4}{4-x^2}$.

b. En déduire les variations de *f* sur l'intervalle $]-2;2[$.

Partie C

Tracer La courbe C. Hachurer la partie P du plan constituée des points *M*(*x* ; *y*) tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq y \leq \ln 3$.

En utilisant la partie A, calculer en cm² l'aire de P.

Problème 19

Soit *f* la fonction définie pour tout nombre réel *x* de l'intervalle]0 ; 1] par : $f(x) = 1 + x\ln x$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; 1].

C est la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

T est la droite d'équation *y* = *x*.

La courbe C et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1. a. Justifier que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur]0 ; 1], montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0;1]$, on a $f(x) \leq 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0;1]$.

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. On note *g* la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0;1]$ par $g(x) = 1 + x\ln x - x$.

a. Étudier les variations de *g* sur l'intervalle]0 ; 1] et dresser le tableau de variation de *g*. On ne cherchera pas la limite de *g* en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite T.

4. Soit α un nombre réel tel que $0<\alpha<1$. On pose $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}\left[1-f(x)\right]dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2}{4}$.

b. Déterminer $\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe C, la droite T et l'axe des ordonnées. Vous prendrez soin de tracer C

-Problème 20

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$, et on désigne par sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1-Etude d'une fonction auxiliaire.

2-Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-1+\ln x$

b-vérifier que $g(1)=0$

c-En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$

2-Etude de f

a-Démontrer que : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}, \forall x\in]0;+\infty[$

b-Déduire de la question 1.le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

c-Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

d-Etudier les variations de f

3-Représentations graphiques.

a-Etudier suivant les valeurs de x la position relative de (C_f) par rapport a la courbe (Γ) d'équation $y=\ln x$

b-Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)-\ln x$. Interpréter graphiquement le résultat.

c-Construire la courbe (Γ), puis la courbe (C_f)