Problème 41

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

* la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
* $e^0 = 1$;
* pour tout réel *x*, on a $e^x > x$;
* soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A;+\infty[$ où *A* est un réel positif. Si, pour tout *x* de $[A;+\infty[$, on a $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. On considère la fonction *g* définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout *x* de $[0;+\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2. On appelle *f* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. La courbe C est représentée ci-dessous.

a. Montrer que *f* est positive sur $[0;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.

c. Etudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variations sur $[0;+\infty[$.

3. On considère la fonction *F* définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a. Montrer que *F* est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$.

b. Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

c. Calculer la limite de *F* en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de *F* sur $[0;+\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $F(\alpha) = 0{,}5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit *n* un entier naturel non nul. On note A_n l'aire en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$. Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $A_n \geq 0{,}5$.

Problème 42

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que *x* est solution de l' équation (E) si et seulement si *f* (*x*) = 0.
2. Étude du signe de la fonction *f.*

a. Etudier le sens de variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

d. Étudier le signe de *f* sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

II. Deuxième approche

On note *g* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x)=\dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha)=\alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction *g* est croissante sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel *n*, par : $u_{n+1}=g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* : $0\le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note *l* sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(l)=l$. En déduire la valeur de *l*.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Problème 43

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$.

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel *x* non nul, $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.Déduire la limite de *f* en $+\infty$ 2.

Donner, sans démonstration, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x-1}$ et démontrer que *f* est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel *x*, on a : $e^x\ge x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour *x* = 0.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction *f* et déterminer la fonction *g* telle que, pour tout nombre réel *x* non nul, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de *f*.

4. Soient *x* un nombre réel non nul et les points *M*(*x* ; *f*(*x*)) et $M'(-x;f(-x))$ de la courbe C.

a. Établir que $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (*MM*').

b. On admet que la fonction *f* est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

Problème 44

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative *C* est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de *f* en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C_f).

c. Étudier la position relative de (C_f) et Δ.

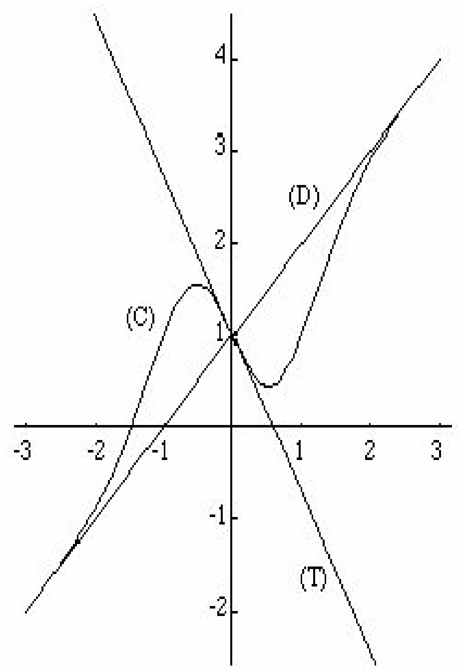
2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
4. a. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ.
b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Problème 45

Sur la feuille ci-jointe figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur R ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0.
On sait que le point J (0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points $k(-1;0)$ et J, que la tangente (T) a pour équation . $y=(1-x)e+1$

Partie A
Expression de *f*
1. Déterminer une équation de (D).
On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction ξ définie sur R telle que, pour tout réel x,
$f(x) = mx+p+\xi(x)(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty}\xi(x)=0$.
a) Déterminer m et p.
b) Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x)+f(-x)=2$
c) En déduire que la fonction f est impaire puis que la fonction $f\,'$, dérivée de f, est paire.
3. On suppose maintenant que, pour tout réel x, $\xi(x)=(ax+b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
Montrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que a = □ e et $b = 0$.
Partie B
On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=1+x-xe^{-x^2+1}$ et on suppose que la courbe (C) représente la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. *a)* Montrer que, pour tout réel x, la dérivée $f\,'$ de f vérifie : $f'(x) = 1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$. Calculer $f'(0)$.
b) Vérifier que (T) est bien la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
Étudier la position relative de la courbe (C_f) et de sa tangente (T).
2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur [0; 1].
a) Montrer que $f''(x)$ est du signe de $(6x-4x^3)$.
b) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1].
c) Montrer que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.
d) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.
Partie C
Sur le graphique, la courbe (C_f) est très proche de son asymptote pour les points d'abscisse supérieure à 2,4.



Cette partie propose de préciser cette situation en calculant, pour tout réel x positif ou nul, l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par (C_f), (D) et les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = 3$.

1. Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer la limite A de $\mathcal{A}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. À partir de quelle valeur de x a-t-on $|\mathcal{A}(x) - A| \leq 10^{-2}$?