Problème 46

L'objet de ce problème est :

- d'étudier la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$;

-de justifier *rigoureusement* le tracé de sa courbe représentative C dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 5 cm ;

-de détailler enfin certaines propriétés d'une suite de nombres réels construite à partir de f .

Partie I
Questions préliminaires

1. Soit *g* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}-x+1$.

a) Montrer que, pour tout *x* > 0, on a *g*´(*x*) > 0. En déduire le sens de variation de *g* sur $[0;+\infty[$.

b) Calculez *g*(0). En déduire que, pour tout *x* > 0, on a *g*(*x*) > 0.

2. Soit *h* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=(2-x)e^{-x}-1$

a) Étudier la fonction *h* et dresser son tableau de variation $[0;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution et une seule α et que l'on a $\alpha > 1$.

c) Vérifier la double inégalité. $1,84<\alpha<1,85$.

d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x>0$, le signe de $h(x)$.

Partie II
Etude de la fonction *f* et tracé de la courbe C

1. *a)* Justifier que *f* est définie en tout point de $[0;+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x>0$, on peut écrire $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Interpréter géométriquement, relativement à C, le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.

d) Étudier la fonction *f* et dresser son tableau de variation.

2. *a)* Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x>0$, la position de la courbe C par rapport à la droite D d'équation *y* = *x*.

3. *a)* Préciser la tangente au point de C d'abscisse 0.

b) Tracer C, en faisant figurer sur le dessin la droite D d'équation *y* = 1 et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

Partie III
Etude de la suite $u_n=\int_0^n [f(x)-1]\,dx$

1. Déterminer une primitive de la fonction *f*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

2. Interpréter géométriquement le nombre réel □ u_1.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (on pourra utiliser l'égalité $n = \ln(e^n)$).

4. Interpréter géométriquement le nombre réel u_n □ u_1 puis le résultat obtenu dans la question précédente.

Fomesoutra.Com
ça soutra !

Problème 47

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).
1. Déterminer la limite de *f* quand *x* tend vers 0, *x* réel positif. En déduire que C possède une asymptote dont on précisera l'équation.
2. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$. Montrer que la droite D d'équation *y* = 2*x* +1 est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à la droite D.
3. a. Calculer, pour tout *x* réel strictement positif, le nombre dérivé *f* '(*x*). Montrer que, pour tout *x* réel strictement positif, $f'(x) = 2\dfrac{\left(e^x - \frac{1}{2}\right)\left(e^x - 2\right)}{\left(e^x - 1\right)^2}$.

b. Étudier le signe de *f* '(*x*) sur l'intervalle]0 ; $+\infty$ [.
En déduire le tableau de variations de *f* sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe C et ses asymptotes.
5. a. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout *x* > 0, $f(x) = ax + b + \dfrac{ce^x}{e^x - 1}$.

b. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équations *x* = 1 et *x* = 3. Déterminer l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

Etude d'une fonction puissance
Problème 1

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$; $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

1-a- Donner le tableau de variations de g.
b-Donner le signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2-On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
.
a-Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f ; en déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
b-Calculer la dérivée de f sur D_f et étudier le signe de $f'(x)$ en s'aidant du **1)**
c-Donner le tableau de variations de f
d-Construire (C_f) et ses asymptotes.

Problème 48

On considère la fonction f de R vers R définie par : $f(x) = \dfrac{5^{2x}}{5^{2x} - 1}$

1-Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2-Démontrer que f est impaire.
3-Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$, en déduire étudier les variations de f sur $]-\infty;+0[$.

4-a-Résoudre dans R l'équation $f(x) = \dfrac{2}{3}$

b- En déduire les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{2}{3}$ .Fonctions comportant $f_\alpha\,[\alpha > 0]$

Etude de fonctions associes logarithme et exponentielle
Problème 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [par $f(x)=\ln\left(1+xe^{-x}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

PARTIE I
1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de 1 – x.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [. Tracer La courbe C

PARTIE II
Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)\,dx$. On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.
1. Première méthode
a. Représenter, sur la figure la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $A(\lambda)$.
b. Justifier que pour tout nombre réel strictement positif, $A(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.
2. Deuxième méthode
a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$ en fonction de λ.
b. On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u)\leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq-\lambda e^{-\lambda}-e^{\lambda}+1$.
3. Application numérique : avec chacune des deux méthodes trouver un majorant de A(5) arrondi au centième.
Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où λ = 5 ?

Session Normale 2011

<u>Problème 49</u>

Partie A
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x)=e^{x}(1-x)+1$
1-Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2-Calculer la dérivée g' de g.
3-Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
4-a) Démontrer que l'équation *g(x) = 0* admet une solution unique α dans l'intervalle [1,27 ; 1,28].
b) En déduire que : $\begin{cases}\forall x\in\left]-\infty;\alpha\right[, g(x)>0\\ \forall x\in\left]-\infty;\alpha\right[, g(x)<0\end{cases}$

Partie B
Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}+1}+2$
Soit (C_f) la représentation graphique de *f* dans un repère orthogonal (O,I,J)
Unités graphiques : 1 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1- Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ).

3- a) Calculer la dérivée f' de f montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) En déduire le signe $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) démontrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$.

4-Tracer la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le repère (O, I, J)

Session Normale 2010

Problème 50

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0:+\infty[$ par : $f(x) = 3 - x - \ln x$

1-Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x)$

2-Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

3-Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0:+\infty[$

4-Justifier que $\alpha \in [2;3]$

5-Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeur de x.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $]0:+\infty[$ par : $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$

1- Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} g(x)$

2-a)Calculer la dérivée g' de g et montrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

b) En déduire les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

3-Démontrer que $g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$

4-Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie C

1-Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = 2 - \ln x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\ln x$

2-Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = -x + \ln x$

a) Calculer h' et en déduire une primitive de la fonction $x \mapsto -\ln x$ sur $]0;+\infty[$

b) Déterminer donc une primitive de g sur $]0;+\infty[$

3-Calculer $I = \int_1^e g(x)dx$