Session Normale 2009

<u>Problème 51</u>

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2$

1- a) Résoudre l'équation : $x \in R,\ 2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0$

b) Résoudre l'équation : $x \in R,\ g(x) = 0$

2- démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -\ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]-\ln 2; \ln 2[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{e^{x}}{e^{x} - 1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormée (O, I, J) d'unité 1 cm.

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2- a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (On pourra remarquer que $\forall x \in R, \dfrac{e^{x}}{e^{x} - 1} = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$)

3- a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question 3-a précédente.

4- Démontrer que la droite (Δ_1) d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$. On admettra que la droite (Δ_2) d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

5- On considère par f' la fonction dérivée de f.

a) Calculer pour tout $x \neq 0$ f'(x) et justifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^{x} - 1)^2}$

b) Déduire de la question 2 de la partie A le signe de f'(x) selon les valeurs de x ainsi que les variations de la fonction f.

c) Etablir le tableau de variations de la fonction f.

6- Démontrer que $\Omega\left(0, \frac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f)

7- Représenter graphiquement dans le repère orthonormée (O, I, J), les droites (Δ_1) ; (Δ_2) et la courbe (C_f)

Partie C

1- Justifier que la fonction F telle que $F(x) = x^2 + 2x + \ln(e^{x} - 1)$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

2- Déterminer en cm^2 la valeur exacte puis l'arrondi d'ordre 2 de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Session Normale 2007

Problème 52

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=1-xe^{-x}$

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ $\left(\text{On remarquera que } xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}\right)$

b) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g.

Calculer et étudier pour tout x élément de $[0;+\infty[$ le signe de $g'(x)$

c) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

2- En utilisant le tableau de variation de la fonction g, démontrer que $\forall x \in [0;+\infty[, g(x)>0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x}+\ln x$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonornal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu. .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2- Soit f' la fonction dérivée de f.

a) Calculer pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)$ et Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

b) En utilisant la question 2 de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$

c) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3 a) Démontrer que l'équation $x \in]0;+\infty[, f(x)=0$ admet une solution unique qu'on notera α.

b) Justifier que $0,5<\alpha<0,6$

3- a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$						

b) Construire la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

Partie C

Soit G la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x)=x\ln x - x$

a)Calculer $G'(x)$

b) Déterminer une primitive F de f sur $]0;+\infty[$

2) calculer en cm^2 la valeur exacte puis l'arrondi d'ordre 1 de l'aire S de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisse la courbe (C) les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Session Normale 2006

Exercice 4

A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+2-2\ln x$

1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
2- Calculer g (1).
3- Déduire du tableau de variation de g, le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{\ln x}{x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J) (unité graphique 2cm.)

1- a) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$

2-a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=\dfrac{x}{2}+1$ est asymptote à (C)
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

3-a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x\in]0;+\infty[$ et démontrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$

b) en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
c) Démontrer que l'abscisse du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) est égale au

4- Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point B dont l'abscisse noté α appartient à l'intervalle $]0,51;0,52[$. Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} *près*

4- Construire (C) et (D) on fera figurer les points A et B sur la courbe.

5-

Session Normale 2005

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie de IR vers R par $f(x)=x+1+\ln x$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2- Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

3- Etudier le sens de variation de f sur D_f et dresser son tableau da variation.

4. a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α que l'on notera,

b) calculer $f(0,2)$ et $f(0,3)$ en déduire que $\alpha \in]0,2;0,3[$

c) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$

Partie B

Soit g la fonction $g(x)=x^2+1+2x\ln x$

On désigne par (C), la courbe de g dans un repère orthogonal (0, I, J) d'unité graphique $OI=4cm$ et $OJ=2cm$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.

2- Calculer la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.

3- a) Sachant que g est dérivable sur D_g , calculer $g'(x)$ pour tout x élément de D_g .

b) Démontrer que $g'(x)=2f(x)$ pour tout x élément de D_g .

c) En déduire le tableau de variation de g.

4- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer (C) et (T) dans le repère (O,I,J)

5- a) Soit h la fonction définir sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x^2\ln x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$

Démontrer que h est une primitive de g sur $]0;+\infty[$

a-Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équation $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.Calculer 1'aire$A$ en cm^2