# Sujets de bac : Ln

***Sujet n°1 : extrait de Liban – juin 2004***

**Partie A**

Soit $u$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=x^2-2+\ln(x)$.

1) Etudier les variations de $u$ sur $]0;+\infty[$ et préciser ses limites en $0$ et en $+\infty$.
2) 
   a. Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$. On note $\alpha$ cette solution.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$.
3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de $x$.
4) Montrer l'égalité $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+(2-\ln(x))^2$.
On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]0;+\infty[$.

1) Exprimer, pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2) En déduire les variations de $f$ sur $]0;+\infty[$.

**Partie C**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note :

- $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction $ln$ ;
- $A$ le point de coordonnées $(0;2)$
- $M$ le point de $\Gamma$ d'abscisse $x$ appartenant à $]0;+\infty[$

1) Montrer que la distance $AM$ est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.
2) Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
   a. Montrer que les fonctions $f$ et $g$ ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.
   b. Montrer que la distance $AM$ est minimale en un point de $\Gamma$, noté $P$, dont on précisera les coordonnées.
   c. Montrer que $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite $(AP)$ est-elle perpendiculaire à la tangente à $\Gamma$ en $P$ ?

***Sujet n°2 : extrait de La Réunion – juin 2010***

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=1+\ln(1+x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. On note $D$ la droite d'équation $y=x$.

1) 
   a. Etudier le sens de variations de la fonction $f$.
   b. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2) On désigne par $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.
   a. Déterminer la limite de $g$ en $-1$.
   b. Déterminer la limite de $\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ en $+\infty$ et en déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   c. Etudier le sens de variations de la fonction $g$ puis dresser le tableau de variations de $g$.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha$ négative et $\beta$ appartenant à l'intervalle $[2;3]$.
   e. A l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $D$.

***Sujet n°3 : extrait de Polynésie – septembre 2008***

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}).$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

1) Montrer que pour tout réel $x$, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
   On admet que, pour tout réel $x$, $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite $(d)$ d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$

Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(d)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite $(d')$ d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
4) Etudier les variations de la fonction $f$.
   Montrer que le minimum de la fonction $f$ est égal à $\frac{3}{2}\ln 2$.
5) Tracer les droites $(d)$ et $(d')$ sur la feuille annexe.

***Sujet n°4 : extrait de Nouvelle Calédonie – mars 2005***

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x+1)$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur la calculatrice dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$ ; $-5 \leq y \leq 5$. Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2) D'après cette représentation graphique, que peut-on conjecturer :
   a. Sur les variations de $f$ ?
   b. Sur le nombre de solutions de $f(x) = 0$ ?
3) On va maintenant étudier $f$.
   a. Etudier les limites de $f$ en $-1$ et en $+\infty$
   b. Etudier les variations de $f$ et dresser le tableau de variations.
   c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   d. Ces résultats confirment-ils les conjectures de la question 2 ?
4) On veut représenter sur l'écran de la calculatrice, la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-0{,}1; 0{,}2]$ de façon à visualiser les résultats de la question 3.
   a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée $y$ proposez-vous ?
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée par défaut à $10^{-2}$ près de la plus grande des solutions $\alpha$ de $f(x) = 0$.

***Sujet n°5 : Amérique de Sud – novembre 2008***

*Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.*

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

- $\ln(1) = 0$
- Pour tous réels strictement positifs $x$ et $y$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- Pour tout réel strictement positif $x$, $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$
- $\ln(2) \approx 0{,}69$ à$10^{-2}$ près

1) On considère la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$
   a. Étudier les variations de $f$ et en déduire que $f$ admet un minimum sur$]0\ ;\ +\infty[$.
   b. En déduire le signe de $f$ puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$
   c. En déduire que la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$ est égale à $0$.
2) Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{n}}}$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction $f_n$.

# ***Correction***

***Sujet n°1 : extrait de Liban – juin 2004***

***Partie A***

1) $u$ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Sur $]0;+\infty[$, $u'(x)$ est clairement positif donc $\boxed{u \text{ est croissante sur } ]0;+\infty[.}$

Limite en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty}$

Limite en $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty}$

2)

a. Sur $]0;+\infty[$, $u$ est strictement croissante, continue car dérivable et 0 est bien compris entre les limites de $u$ en 0 et $+\infty$ donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } u(x) = 0 \text{ a une unique solution dans } ]0;+\infty[ \text{ que nous noterons } \alpha.}$

b. A la calculatrice : $u(1) = -1$ ; $u(2) \approx 2{,}7$ donc $1 < \alpha < 2$

$u(1{,}3) \approx -0{,}05$ et $u(1{,}4) \approx 0{,}3$ donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$

$u(1{,}31) \approx -0{,}01$ et $u(1{,}32) \approx 0{,}02$ donc $\boxed{1{,}31 < \alpha < 1{,}32}$

3) A l'aide des variations de $u$, on peut dire que $\boxed{\text{sur } ]0;\alpha],\ u \text{ est négative et sur } [\alpha;+\infty[,\ u \text{ est positive.}}$

4) Par définition de $\alpha$, $u(\alpha) = 0$, autrement dit $\alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0$ ce qui signifie que $\boxed{\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2}$

***Partie B***

1) $f$ est de la forme $u + v^2$ avec $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ donc $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = 2x + \frac{2(2-\ln(x))}{x} = \frac{2x^2 + 4 - 2\ln(x)}{x} = \frac{2(x^2 - 2 + \ln(x))}{x} = \boxed{\frac{2u(x)}{x}}$$

2) Sur $]0;+\infty[$, le dénominateur est positif donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Les limites ne sont pas demandées mais on trouve :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ ; $\lim\limits_{x\to 0} 2 - \ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} (2-\ln(x))^2 = +\infty$ et par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2 - \ln(x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (2-\ln(x))^2 = +\infty$ et par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln(\alpha))^2 = \alpha^2 + (\alpha^2)^2$ car $2 - \ln(\alpha) = \alpha^2$ par définition de $\alpha$.

D'où $\boxed{f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4}$

***Partie C***

1) $A(0;2)$ et $M(x;\ln(x))$ donc

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln(x) - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - \ln(x))^2} = \boxed{\sqrt{f(x)}}$$

2)

a. $g$ est la composée de la fonction $f$ avec la fonction racine carrée qui est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\boxed{f \text{ et } g \text{ ont les mêmes variations sur } ]0;+\infty[.}$

b. Comme $f$ est minimale pour $x = \alpha$, $g$ est également minimal pour $x = \alpha$. La distance $AM$ est donc minimale pour $M = P$ avec $P$ le point de la courbe $\Gamma$ d'abscisse $\alpha$, donc de coordonnées $\boxed{(\alpha;\ln(\alpha))}$.

c. $AP = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)} = \boxed{\alpha\sqrt{1+\alpha}}$

3) Coefficient directeur de $(AP)$ : $\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\ln(\alpha)-2}{\alpha}$

Coefficient directeur de la tangente $T$ à $\Gamma$ en $P$ : $h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ avec $h: x \mapsto \ln(x)$ donc $h'(x) = \frac{1}{x}$.

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à $-1$.

$\frac{\ln(\alpha)-2}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln(\alpha)-2}{\alpha^2} = -\frac{\alpha^2}{\alpha^2} = -1$ car $\ln(\alpha) - 2 = -\alpha^2$ par définition de $\alpha$.

Donc $\boxed{(AP) \text{ est perpendiculaire à la tangente à } \Gamma \text{ en } P}$.

***<u>Sujet n°2 : extrait de La Réunion – juin 2010</u>***

1)

a. $f$ est de la forme $1 + \ln(u)$ avec $u: x \mapsto 1 + x$ dérivable sur $]-1; +\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{1+x}$$

Pour tout $x > -1$, $f'(x)$ est clairement positif donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$.

b. Pour , par la limite en $-1$ :

$\lim\limits_{x \to -1} 1 + x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donccomposition, $\lim\limits_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty}$

Pour la limite en $+\infty$ :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2)

a. Pour $x > -1$, $g(x) = f(x) - x = 1 + \ln(1+x) - x$

Nous avons déjà montré que $\lim\limits_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$ ; de plus $\lim\limits_{x \to -1} 1 - x = 2$ donc, par addition

$\boxed{\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty}$

Pour $x > -1$ : on pose $X = 1 + x$ et alors $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{\ln(X)}{X}$ :

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0}$

Pour $x > -1$ : $g(x) = 1 - x + \ln(x+1) = (x+1)\left[\frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ donc, par addition $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

b. Comme de deux fonctions dérivables sur $]-1; +\infty[$ donc elle est dérivable et :

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

Comme $1 + x$ est positif sur $]-1; +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $-x$ .

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

c. Sur $]-1; 0]$, $g$ est continue car dérivable, strictement croissante et 0 est bien compris entre la limite de $g$ en $-1$ et $g(0)$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution $\alpha$ dans cet intervalle.

On raisonne de la même manière sur $[0; +\infty[$ et on montre que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution $\beta$ dans cet intervalle.

$\boxed{\text{Finalement } g(x) = 0 \text{ a exactement deux solutions : } \alpha \text{ qui est négative et } \beta \text{ qui appartient à } [2; 3] \text{ car } g(2) \approx 0{,}1 \text{ et } g(3) \approx -0{,}6.}$

d. Grâce au tableau de variations de $g$, on obtient : $\boxed{g \text{ est négative sur } ]-1; \alpha[ \cup ]\beta; +\infty[ \text{ et positive sur } ]\alpha; \beta[.}$

***Sujet n°3 : extrait de Polynésie – septembre 2008***

1) Pour tout $x$ réel :

$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln[e^x(1 + 2e^{-2x})] = \ln(e^x) + \ln(1 + 2e^{-2x})$

car $e^x > 0$ et $1 + 2e^{-2x} > 0$. Donc $\boxed{f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})}$

2) Avec l'expression de l'énoncé :

$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0\end{matrix}\right\}$ donc, par addition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2e^{-x} = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition,

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

En utilisant l'expression démontrée à la question précédente :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + 2e^{-2x})$ or $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0\end{matrix}\right\}$ donc, par opérations, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 2e^{-2x} = 1$

$\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0}$

Ceci montrer que la droite $(d)$ d'équation $y = x$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Pour étudier la position relative de $(d)$ et $(\mathcal{C})$, on étudie le signe de $f(x) - x$ soit de $\ln(1 + 2e^{-2x})$.

Or, pour tout $x$ réel, $e^{-2x} > 0$ donc $1 + 2e^{-2x} > 1$ et comme $ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$,

$\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$. Donc $(\mathcal{C})$ est au dessus de $(d)$.

3) Pour tout réel $x$ : $f(x) - (-x + \ln(2)) = -x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln(2) = \ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{2}e^{2x} = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to1} \ln(x) = 0$ donc, par composition

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x + \ln(2)) = 0}$

Ceci montre que la droite $(d')$ d'équation $y = -x + \ln(2)$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

4) $f$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u\colon x \mapsto e^x + 2e^{-x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x - 2e^{-x}$

Donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$

Le dénominateur est strictement positif car la fonction exponentielle est strictement positive. Donc $f'$ est du même signe que son numérateur. Or :

$e^x - 2e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 2$ (en multipliant par $e^x > 0$)

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) > \ln(2)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante

$\Leftrightarrow 2x > \ln(2) \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}\ln(2) \Leftrightarrow x > \ln(\sqrt{2})$

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(\sqrt{2})$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Donc $f$ admet un minimum en $\ln(\sqrt{2})$

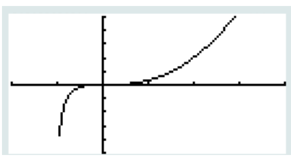
$f(\ln(\sqrt{2})) = \ln\left(e^{\ln(\sqrt{2})} + 2e^{-\ln(\sqrt{2})}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln(2\sqrt{2}) = \ln\left(\sqrt{2}^3\right) = \ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2}\ln(2)$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ a un minimum égal à } \frac{3}{2}\ln(2)}$

Sujet n°4 : extrait de Nouvelle Calédonie – mars 2005

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x + 1)$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1)



2)

a. Il semble que $f$ soit croissante sur $]-1;+\infty[$.

b. Il semble que l'équation $f(x)=0$ a une seule solution sur $]-1;+\infty[$ qui est $0$.

3)

a. En $-1$ :

$\lim\limits_{x\to-1} x^2-2{,}2x=(-1)^2-2{,}2\times(-1)=3{,}2$ et $\lim\limits_{x\to-1}\ln(x+1)=-\infty$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty}$

En $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2{,}2x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

b. $f$ est de la forme $u+2{,}2\ln(v)$ avec $u(x)=x^2-2{,}2x$ dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $v(x)=x+1$ dérivable et strictement positive sur $]-1;+\infty[$ donc $f$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et

$$f'(x)=u'(x)+2{,}2\times\frac{v'(x)}{v(x)}=2x-2{,}2+\frac{2{,}2}{x+1}=\frac{2x^2+2x-2{,}2x-2{,}2+2{,}2}{x+1}=\frac{2x^2-0{,}2x}{x+1}=\frac{2x(x-0{,}1)}{x+1}$$

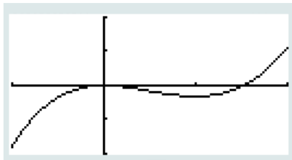
| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $0{,}1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $2x(x-0{,}1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $x+1$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f(0{,}1)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

c. Sur $]-1;0{,}1]$, le maximum de $f$ est $0$ donc l'équation $f(x)=0$ a une solution dans cet intervalle. Sur $[0{,}1;+\infty[$, $f$ est continue car dérivable, strictement croissante et $0$ est compris entre $f(0{,}1)$ et la limite de $f$ en $+\infty$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ a une solution dans cet intervalle. Finalement, l'équation $f(x)=0$ a deux solutions dans $]-1;+\infty[$.

d. Ces résultats ne confirment pas nos lectures graphiques de la question 2. Ces dernières n'étaient pas assez précises. Il faut zoomer sur la zone adaptée pour voir les deux solutions de $f(x)=0$.

4)

a. $f(-0{,}1)\approx-0{,}0018$ ; $f(0{,}1)\approx-0{,}0003$ et $f(0{,}2)\approx 0{,}0011$. On peut donc choisir $\boxed{-0{,}002\le y\le 0{,}002}$ On obtient alors :



b. On trouve $\boxed{\alpha\approx 0{,}15}$

***__Sujet n°5 : Amérique du Sud – novembre 2008__***

1) $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x)$

a. $f$ est de la somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ donc est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

Sur $]0;+\infty[$, $2x$ est positif donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x}-2$ :

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| de $f$ | | $\searrow$ | $2-\ln 4$ | $\nearrow$ | |

$f$ admet donc un minimum en 4.

b. Le minimum de $f$ est $f(4)\approx 0{,}61>0$ donc $f$ est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

On en déduit que, pour tout $x>0$, $\sqrt{x}>\ln(x)$

Sur $]1;+\infty[$, on en a donc : $0<\ln(x)<\sqrt{x}$ et en divisant par $x>0$, on obtient : $\boxed{0<\frac{\ln(x)}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}}$

c. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0}$

2) On pose $X=x^{\frac{1}{n}}$ : $f_n(x)=\frac{\ln(X^n)}{X}=\frac{n\ln(X)}{X}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}=0\end{array}\right\}\text{ donc, par composition et multiplication par } n\text{ , }\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0}$$