

CORRIGE SUJET 1

1. $z_2 = iz_1 = i(-1 - \sqrt{3}i) = -i + \sqrt{3}$

2.a) Calcul du module et d'un argument de z_1, z_2 . On sait que si $z = a + bi$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Donc

$$|z_1| = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \quad , \text{comme} \quad z_2 = iz_1 \quad , \quad \text{donc}$$

$$|z_2| = |iz_1| = |i||z_1| = 1 \times 2 = 2$$

de plus, l'argument θ d'un nombre complexe $z = a + bi$ est défini par
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Donc, si on note θ_1 , et θ_2 les arguments des complexes z_1 et z_2 alors on a :

L'argument θ_1 est défini par
$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_1 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } z_1 = \left[2; \frac{4\pi}{3} \right]$$

L'argument θ_2 est défini par
$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } z_2 = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]$$

3.a $\bar{z}_1 = (-1 + \sqrt{3}i)$, donc $2\bar{z}_1 = 2(-1 + \sqrt{3}i) = -2 + 2\sqrt{3}i = z_A$ et

$-z_A = -(-2 + 2\sqrt{3}i) = 2 - 2\sqrt{3}i = z_B$

c. $\vec{z}_{AB} = z_B - z_A = 2 - 2i\sqrt{3} - (-2 + 2i\sqrt{3}) = 4 - 4i\sqrt{3}$ Donc on a : $\vec{AB}(4; -4\sqrt{3})$

$\vec{z}_{BC} = z_C - z_B = 8 - (2 - 2i\sqrt{3}) = 6 + 2i\sqrt{3}$ Donc on a : $\vec{BC}(6; 2\sqrt{3})$

$\vec{z}_{AC} = z_C - z_A = 8 - (-2 + 2i\sqrt{3}) = 10 - 2i\sqrt{3}$. Donc on a : $\vec{AC}(10; -2\sqrt{3})$

Deux méthodes envisageables :

1. produit scalaire : $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = x_{\vec{AB}} x_{\vec{BC}} + y_{\vec{AB}} y_{\vec{BC}} = 4 \times 6 + (-4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}) = 24 - 24 = 0$ ce

qui montre

Que le triangle ABC est rectangle en B .

2. Réciproque du triangle Pythagore : $AB = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8\text{cm}$;

$BC = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\text{cm}$. $AC = \sqrt{10^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{100 + 12} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}\text{cm}$

On constate que $AB^2 + BC^2 = 64 + 48 = 112$ et $AC^2 = 112$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore



Le triangle ABC est rectangle en B.

3. le quadrilatère ABCD soit un rectangle , donc en particulier ABCD est un parallélogramme

Donc $\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D : z_B - z_A = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_C - z_D = 8 - z_D$, donc
 $z_D = 4 + 4i\sqrt{3}$