Corrigé sujet 2

Partie I

On considère, les nombres complexes $z_A = 4e^{i\pi/6}$; $z_B = 4e^{-2i\pi/3}$ et , $z_C = -2+2i$.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A \times z_B$ est :

$$z_A = 4e^{i\pi/6} \times 4e^{-2i\pi/3} = 16e^{i\pi/6-2i\pi/3} = 16e^{-3i\pi/6} = 16e^{-i\pi/2} = -16i$$

Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B :** un nombre réel négatif
Réponse C : un nombre imaginaire pur **Réponse D :** l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est : $Z_2 = (z_A)^6 = \left(4e^{i\pi/6}\right)^6 = (4)^6 e^{i\pi} = -4^6$

Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B : un nombre réel négatif**
Réponse C : un nombre imaginaire pur **Réponse D :** l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est : $\overline{z_A} = \overline{4e^{i\pi/6}} = 4e^{-i\pi/6}$

Réponse A : $-4e^{i\pi/6}$ **Réponse B :** $4e^{i7\pi/6}$ **Réponse C :** $4e^{-i\pi/6}$ **Réponse D :** $\frac{1}{4}e^{-i\pi/6}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

$$z_C = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right) = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$$

Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ **Réponse B :** $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ **Réponse C :** $2\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$

Réponse D : $4e^{3i\pi/4}$

Partie II

1. soit M un point d'affixe z . $z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$;

$\left|z_{\overrightarrow{AM}}\right| = |z_M - z_A| = AM$

Donc $|z_M - z_A|$ est égale à la distance AM .

b. $|z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

l'ensemble D des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

c. $z_A = 4e^{i\pi/6} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}+2i$

$$z_B = 4e^{-2i\pi/3} = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2-2\sqrt{3}i$$

$AC = \left|z_C - z_A\right| = \left|-2+2i-2\sqrt{3}-2i\right| = \left|-2-2\sqrt{3}\right| = 2+2\sqrt{3}$.

$BC = \left|z_C - z_B\right| = \left|-2+2i+2+2\sqrt{3}i\right| = \left|2i+2\sqrt{3}i\right| = 2+2\sqrt{3}$, donc $AC = BC$ .et par conséquent , le point C
appartient à l'ensemble D.

3. $AB = \left|z_B - z_C\right| = \left|-2-2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}-2i\right| = \left|-\left(2+2\sqrt{3}\right)-\left(2+2\sqrt{3}\right)i\right|$

$$AB = \sqrt{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2\left(2+2\sqrt{3}\right)^2} = \left(2+2\sqrt{3}\right)\sqrt{2}$$

Donc $AC^2 + BC^2 = \left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)^2 = 2\left(2+2\sqrt{3}\right)^2 = AB^2$,donc $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore , le triangle ABC est rectangle en C .

3. on a : le triangle ABC est rectangle en C . et AC=BC , donc le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

1. $Z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2+2i} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)\left(2-2i\right)}{\left(2+2i\right)\left(2-2i\right)} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8}+i\frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2.$\|z_1\|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2 = 2+6 = 8$, $\|z_1\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et on a

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \;;\quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ , avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

$\|z_2\|^2 = 2^2+2^2 = 4+4 = 8$; $\|z_1\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et on a

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \;;\quad \theta = \frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ , avec } k \in \mathbb{Z}$$

$z_2 = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi/4\right)+i\sin\left(\pi/4\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

On a donc $\left|Z\right| = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|} = 1$ et on a : $\arg Z = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $Z = \cos\left(\pi/12\right) + i\sin\left(\pi/12\right)$, donc $\cos\left(\pi/12\right) = \mathrm{Re}(Z)$ et $\sin\left(\pi/12\right) = \mathrm{Im}(Z)$

et on a : $\cos\left(\pi/12\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\pi/12\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$