Corrigé sujet 4

1. Résolution de l'équation $z^2+6\sqrt{3}\,z+36=0$:

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(6\sqrt{3}\right)^2-4\times 36=108-144=-36<0$, $\Delta=36i^2$ et on a $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36i^2}=6i$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\dfrac{-6\sqrt{3}-i\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-6\sqrt{3}-6i}{2}=-3\sqrt{3}-3i$, De même : $z_2=-3\sqrt{3}+3i$

L'ensemble des solutions est donc : $S=\left\{-3\sqrt{3}-3i;-3\sqrt{3}+3i\right\}$

2. a) Calcul du module et d'un argument de $z_A=-3\sqrt{3}+3i$:

$|z_A|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6$

Soit θ_A un argument de z_A ; θ_A est tel que : $\begin{cases}\cos\theta_A=\dfrac{a}{|z_A|}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{b}{|z_A|}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ donc

$\theta_A=\arg z_A=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$,

où k est un entier relatif.

Calcul du module et d'un argument de $z_B=-3\sqrt{3}-3i$: $z_B=\overline{z_A}$, donc $|z_B|=|\overline{z_A}|=6$

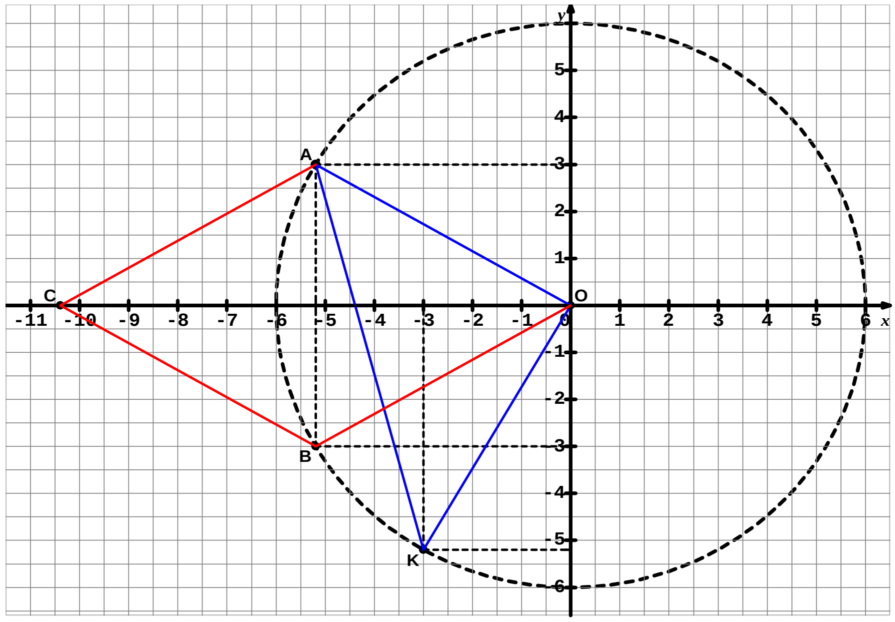
et $\theta_B=\arg\overline{z_A}=-\arg z_A=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$

2. b) On en déduit la forme exponentielle de $z_A=-3\sqrt{3}+3i$:

$z_A=6\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)=6e^{5\pi i/6}$

2. c) Pour placer les points A et B avec précision, étant donné que OA = OB = 6, on peut les placer sur

le cercle de centre O et de rayon 6, en utilisant leurs ordonnées qui sont entières.



3. a) Calcul des longueurs AC et BC :

on calcule d'abord l'affixe du chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$,

en effet : $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3}+3i\right) = -3\sqrt{3} - 3i$ et

$$AC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

de même $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -3\sqrt{3} - 3i - \left(-3\sqrt{3}+3i\right) = 6i$ et $AB = \sqrt{36} = 6\,cm$.

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} - 3i\right) = -3\sqrt{3} + 3i$ et

$$BC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

On a AC = AC donc le triangle ABC est isocèle en A.
De plus : AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.

3. b) On a AC = BC = OA = OB (= 6) donc OACD est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même
longueur, c'est donc un losange.

4. a) Voir figure : Comme $z_K = iz_A$, $z_K = i\left(-3\sqrt{3}+3i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i$

$$OK = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

$$\begin{cases} \cos\theta_K = \dfrac{a}{|z_A|} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_K = \dfrac{b}{|z_A|} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta_K = \arg z_K = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } z_K = 6e^{4\pi i/3}$$

on a donc $|z_K|=|iz_A|=|i||z_A|=1\times 6=6=OK$,donc $OA=OK=6cm$ .OAK est donc un triangle isocèle
en O, de plus K appartient au cercle de centre O et de rayon OA.

Calculons AK : $z_{\overline{AK}}=z_K-z_A=-3-3\sqrt{3}i-\left(-3\sqrt{3}+3i\right)=\left(3\sqrt{3}-3\right)-\left(3\sqrt{3}+3\right)i$

$$AK==\sqrt{\left(3\sqrt{3}-3\right)^2+\left(3\sqrt{3}+3\right)^2}=\sqrt{27+9-18\sqrt{3}+27+9+18\sqrt{3}}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\,cm.$$

On constate que $OA^2+OK^2=6^2+6^2=36+36=72$ et $AK^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$, donc on a : $OA^2+OK^2=AK^2$,
d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OAK est aussi rectangle en O