SUJET 10

Partie A :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes ,l'équation

$(E): z^3 + 2z^2 - 16 = 0$

1) Montrer que 2 est solution de l'équation (E), et déterminer trois réels *a; b; c* tels que

$$(E): z^3 + 2\,z^2 - 16 = (z-2)(a\,z^2 + b\,z + c)$$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$; l'unité graphique 1 cm sur les axes..

1) Placer les points *A ; B* et C d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = 2$ et $z_C = -2-2i$

2) ABDC parallélogramme si et seulement si $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}}$.

Calculer l'affixe z_D du point *D* tel que *ABDC* soit un parallélogramme et placer le point *C.*

3) On pose $z_D = 2-4i$.

Soit les points *M* et *N* définis par : $z_M = i \times z_D + z_B \times (1-i)$ et $z_N = -i \times z_D + z_C \times (1+i)$

Mettre z_M et z_N sous forme algébrique puis placer les points *M* et *N* dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

4) Déterminer la nature du triangle *AMN.*

SUJET 11

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.

b. Donner la forme exponentielle de z_A.

c. Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3. On désigne par $\Re$ la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre

le point M' d'affixe *z*' tel que : $z' = e^{i2\pi/3}\,z$.

a. Indiquer la nature de la transformation $\Re$ et préciser ses éléments caractéristiques.

b. On nomme C l'image du point A par la transformation $\Re$.

Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_C du point C. En déduire sa forme algébrique.

c. Placer le point C.

d. Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation $\Re$.

4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

SUJET 12

On désigne par *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On pose $z_1 = 1+i$; $z_2 = \sqrt{3}+i$; $z_3 = z_1^3 z_2$

1.**a.** Mettre z_1^3 sous la forme algébrique (on pourra utiliser une identité remarquable **)**

b. Mettre le nombre complexe z_3 sous la forme algébrique.

2. a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_1 , puis le module et un argument du nombre complexe z_1^3

b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_2.

c. Déduire des questions précédentes la forme trigonométrique du nombre complexe z_3.

3. En comparant les forme trigonométrique et algébrique de z_3 , déterminer les valeurs exactes

de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

SUJET 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 6 = 0$.

   On désigne par A le point d'affixe $z_A = 2 - i\sqrt{2}$ et $z_B = 2 + i\sqrt{2}$.

2 .Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.

3 .Montrer que les points A et B appartiennent au cercle C de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.

4. Soient I, J et K les points d'affixes respectives z_I , z_J et z_K telles que : $z_I = 2i$

   z_J est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$; $z_K = -z_J$

   a. Donner la forme algébrique de z_J.

   b. Placer les points I, J et K dans le plan complexe.

5 .Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

   Donner le rayon du cercle C 'circonscrit au triangle IJK.

6. Soit E l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $2 < |z| < \sqrt{6}$

   a. Tracer les cercles C et C '.

   b. Représenter l'ensemble E sur le graphique précédent à l'aide de hachures. Justifier.

SUJET 14

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.
On appelle *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
On appelle notation exponentielle du nombre complexe *z* l'écriture de *z* sous la forme $z = re^{i\theta}$ où *r* est
le module de *z* et θ un argument de *z* .
1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation: $z^2 - z + 1 = 0$.

2. On pose $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_E = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 a. Ecrire z_A et z_E en notation exponentielle.
b. Construire les points A et E d'affixes respectives z_A et z_E .
3. On définit les quatre nombres complexes suivants : $z_B = z_A^2$; $z_C = z_A^3$; $z_D = z_A^4$; $z_F = z_A^6$
a. Ecrire ces quatre nombres complexes en notation exponentielle puis sous forme algébriques.
b. Démontrer que les points A , B, C, D, E et F sont situés sur un même cercle dont on précisera
 le centre et le rayon .
c. Construire les points B, C, D et F. On justifiera la construction.

SUJET 15

1. Résoudre dans C l'équation $z^2 - 4\sqrt{3}\,z + 16 = 0$.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1cm.
 Soit les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives :
$z_A = 2\sqrt{3} + 2i$; $z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_C = 2e^{i\pi/6}$.
 a. Calculer le module et un argument de z_A et z_B .
 b. Construire les points A, B et C.
 c. Calculer $|z_A - z_B|$.
 d. Quelle est la nature du triangle OAB? (justifier la réponse).
3.a. Ecrire z_C sous forme algébrique.
 b. Montrer que C est le milieu du segment [OA].
4. Quelle est la nature du triangle ABC? (justifier la réponse).

SUJET 16

La plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ l'unité graphique 1 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et l'argument $\pi/2$.
1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation : $z^2 + 6\sqrt{3}z + 36 = 0$
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -3\sqrt{3}+3i$; $z_B = -3\sqrt{3}-3i$ et $z_C = -6\sqrt{3}$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b. Ecrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

3. a. Déterminer la nature du triangle ABC.
   b. En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.
4. On appelle K le point du plan complexe tel que $z_K = i \times z_A$
   a. Donner la forme algébrique , puis la forme exponentielle de z_K
   b. Démontrer que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.
   c. Construire le point K sur la figure.

SUJET 17

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soit $P(z) = z^3 + 4z^2\sqrt{3} + 24z + 24\sqrt{3}$ où z est une variable complexe.

1. Vérifier que $P(z) = (z+2\sqrt{3})(z^2+2\sqrt{3}\,z+12)$.
2. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation $z^2+2\sqrt{3}\,z+12$.
3. En déduire les solutions dans C de l'équation $P(z) = 0$.
4. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2\sqrt{3}$, $z_B = -\sqrt{3}+3i$, $z_C = -\sqrt{3}-3i$.
5. a. Déterminer le module et un argument de z_A, z_B et z_C.
   b. Donner l'écriture exponentielle de z_A, z_B et z_C.
6. $\mathfrak{R}$ est la rotation de centre O et d'angle $-\pi/3$.
   a. Donner l'écriture complexe de R.
   b. Montrer que l'image de A par R est B.
   c. Calculer, sous forme algébrique, l'affixe de D, image de B par $\mathfrak{R}$.
7. Soit (C) le cercle de diamètre [CD].
   a. Justifier que O est le centre de (C) .
   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (C) .
   c. En déduire la nature des triangles CAD et CBD.

SUJET 18

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère un polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$ où z est une variable complexe.

1. a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z+2)(az^2+bz+c)$.
   b. Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.

   On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2-2i$ et $z_B = 2+2i$.

   a. Écrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres z_A et z_B.

b. Placer dans le plan P les points *A* et *B*.
c. Quelle est la nature du triangle *OAB* ?
2. On considère la transformation R du plan P dans lui-même qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe
le point *M* ' d'affixe *z*' tel que $z' = e^{i\pi/3}z$.
a. Caractériser géométriquement la transformation T.
b. Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point *A*' image de *A*
par la transformation R.
c. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

SUJET 20

Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ont pour affixes respectives $1-i$ et $-2+3i$

Calculer les affixes des vecteurs : $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{v_1}-\frac{3}{2}\overrightarrow{v_2}$