CORRIGE SUJET 19

1°.a l'ensemble des points d'affixe z tel que $|z-4-3j|=5$ est le cercle de centre $A(4;3)$ et de rayon 5.

b. $z+3+j=x+3+jy=x+3+jy=1$, $Re(z+3+j)=1$si et seulement si $x+3=1 \Leftrightarrow x=-2$, donc

l'ensemble des points d'affixe z tel que $Re(z+3+j)=1$ est la droite d'équation $x=-2$.

c. $x+jy-1-j=x-1+j(y-1)$ $\operatorname{Im}(z-1-j)=3 \Leftrightarrow y-1=3 \Leftrightarrow y=3+1=4$, donc l'ensemble des points

d'affixe z tel que $\operatorname{Im}(z-1-j)=3$ est la droite d'équation $y=4$

d. $\arg(z-z_A)$est une mesure de l'angle $(\vec{u};\overline{AM})$ la ligne de niveau définie par

$\arg(z-z_A)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ est la demi-droite d'extrémité $A(-3;2)$ (A non comprise) faisant un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par A.

2.

$$c^2=\left[\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)j\right]^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)j=8\sqrt{3}+8j$$

$|c^2|=|8\sqrt{3}+8j|=\sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2+8^2}=\sqrt{162+64}=\sqrt{256}=16$, donc $|c|=\sqrt{16}=4$

$\alpha=\arctan\frac{b}{a}=\arctan\frac{8}{8\sqrt{3}}=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$. Donc

$\alpha=\arg c^2=\arg\left(8\sqrt{3}+8j\right)=\frac{\pi}{6}$,

et on a : $\theta=\arg c=\frac{\pi}{12}+k\pi$ donc

$$c=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)j=4e^{j\pi/12}=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

D'où $4\cos(\pi/12)=\sqrt{2}+\sqrt{6} \Leftrightarrow \cos(\pi/12)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et

$4\sin(\pi/12)=\sqrt{6}-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(\pi/12)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3. Soit $d=2\sqrt{3}+2j$.

a. Déterminer un couple de réels *x* et *y* tels que: $(x+yj)^2=2\sqrt{3}+2j$

$(x+yj)^2=2\sqrt{3}+2j \Leftrightarrow x^2-y^2+2jxy=2\sqrt{3}+2j$, donc $\begin{cases}x^2-y^2=2\sqrt{3}\\ x^2+y^2=4\\ 2xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=2\sqrt{3}\\ x^2+y^2=4\\ xy=1\end{cases}$

par addition on obtient : $2x^2=4+2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2=2+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$

et par soustraction on obtient : $2y^2=4-2\sqrt{2} \Leftrightarrow y^2=2-\sqrt{2} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$

donc $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\,j$ ou $z=-\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\,j$

$|d|=\left|2\sqrt{3}+2j\right|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+4}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$ et $d=2\sqrt{3}+2j=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}j\right)=4e^{j\pi/6}$

donc $z^2=4e^{j\pi/6}\Leftrightarrow z=2\times e^{j\pi/12}=2\left[\cos\left(\pi/12\right)+j\sin\left(\pi/12\right)\right]$.

$z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\,j=2\left[\cos\left(\pi/12\right)+j\sin\left(\pi/12\right)\right]$. $\cos\left(\pi/12\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et

$\sin\left(\pi/12\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.