CORRIGE SUJET 49

Partie A

1. $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 64 = 192 - 256 = -64 = (8i)^2$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}-8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i \text{ et } z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}+8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i .$$

Les racines sont donc : $4\sqrt{3} + 4i$ et $4\sqrt{3} - 4i$.

2. on a : $\left|z_0^3\right| = |z_0|^3 = 2^3 = 8$. De même $\arg z_0^3 = 3\arg z_0 = 3\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, on obtient donc $z_0 = 8e^{i\pi/2} = 8i$

Partie B

1.Soit $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$. On a : $|z_B| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{45+16} = \sqrt{64} = 8$ donc $|z_B| = 8$

Soit $\theta_B = \arg z_B$ avec $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, donc on obtient :

$z_B = 4\sqrt{3} + 4i = r\left(\cos\theta_B + i\sin\theta_B\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 8e^{i\pi/6}$ Comme $z_C = \overline{z_B}$,alors $z_C = 8e^{-i\pi/6}$ .Un des arguments de z_C est $z_C = -\pi/6 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Comme *i* le nombre complexe est : de module 1 et d'argument $\pi/2$.
On en déduit l'écriture exponentielle : $z_A = 8i = 8e^{i\pi/2}$.

3. a. L'écriture complexe de la rotation est : $z' - z_O = (z - z_O)e^{i\pi/3}$, donc

$$z_D = z_A e^{i\pi/3} = 8e^{i\pi/2} \times e^{i\pi/3} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{5\pi i/6} = 4\left(\cos(5\pi/6) + j\sin(5\pi/6)\right) = -4\sqrt{3} + 4i$$

4.a On place B sur le cercle de centre O et de rayon 8 et la droite d'équation $y = 4$.

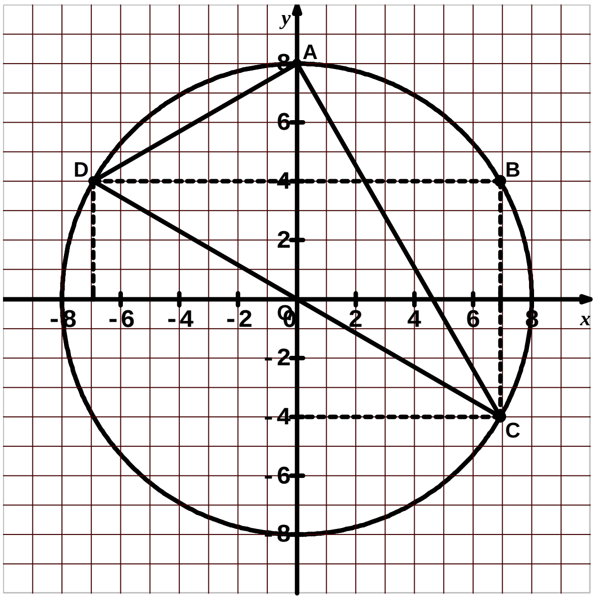
b. Par définition de la rotation OA = OD, donc OAD est isocèle en O.De plus $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{3}$ angle de rotation

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) = \arg\left(z_D - z_A\right) = \left(\overrightarrow{OA};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right) = -\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Il en résulte que les angles à la base ont également une mesure égale à $\frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral.

c. On a $z_M = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 4i - 4\sqrt{3} + 4i}{2} = 0$. Donc $M \equiv O$ et O est le milieu de [CD].

d. D'après la question précédente [CD] est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 8 ;



A étant un point de cercle ($|z_A|=|8i|=8|i|=8$). le triangle ACD est donc rectangle en A.

CORRIGE SUJET 50

$z'=z^2-4z$.

1\. a. $z_A=1-i \to z_{A'}=(1-i)^2-4(1-i)=-2i-4+4i=-4+2i$ et
$z_B=3+i \to z_{B'}=9+6i-1-12-4i=-4+2i$.

b. appelons *u* et *v* les affixes des points *U* et *V* en question : $u'=u^2-4u$ et $v'=v^2-4v$; leurs images sont identiques si

$$u'=v' \Leftrightarrow u^2-4u=v^2-4v \Leftrightarrow u^2-v^2-4u+4v=0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v)-4(u-v)=0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v-4)=0 .$$

On a donc soit $u=v$, soit $u+v=4 \Leftrightarrow \frac{u+v}{2}=2$, et dans ce cas le milieu de [*UV*] a pour affixe 2 et l'un est l'image de l'autre par la symétrie de centre 2.

2\. a. *I*(−3). *OMIM*' est un parallélogramme si et seulement si

$$\overline{OM}=\overline{M'I} \Leftrightarrow z-0=-3-z' \Leftrightarrow z'+z+3=0 \Leftrightarrow z^2-3z+3=0 .$$

b. $z^2-3z+3=0$: $\Delta=9-12=-3=3i^2$ d'où $z_1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3\. a. $(z'+4)=z^2-4z+4=(z-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |z'+4|=|z-2|^2 \\ \arg(z'+4)=2\arg(z-2)+2k\pi \end{cases}$.

b. Soit *M* un point du cercle (C) de centre *J*(2) et de rayon 2, son affixe *z* est telle que $|z-2|=2$, et son image *M*' est telle que $|z'+4|=2^2=4$ d'où *M*' est sur le cercle de centre *K*(−4), de rayon 4.

c. $z_E+4=-3i=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$; si *E* est l'image d'un point *z*, on a

$$\arg(z_E+4)=2\arg(z-2)+2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}=2\arg(z-2)+2k\pi \Leftrightarrow \arg(z-2)=-\frac{\pi}{4}-k\pi .$$

Sur le cercle trigo il y a donc deux arguments possibles, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$. Il reste à trouver les modules : $|z_E+4||-3i|=3=|z-2|^2 \Rightarrow |z-2|=3$. Conclusion on a $z-2=3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $z-2=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$, soit $z=2+3e^{i\frac{3\pi}{4}}=2+3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4-3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou

$z=2+3e^{-i\frac{\pi}{4}}=2+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

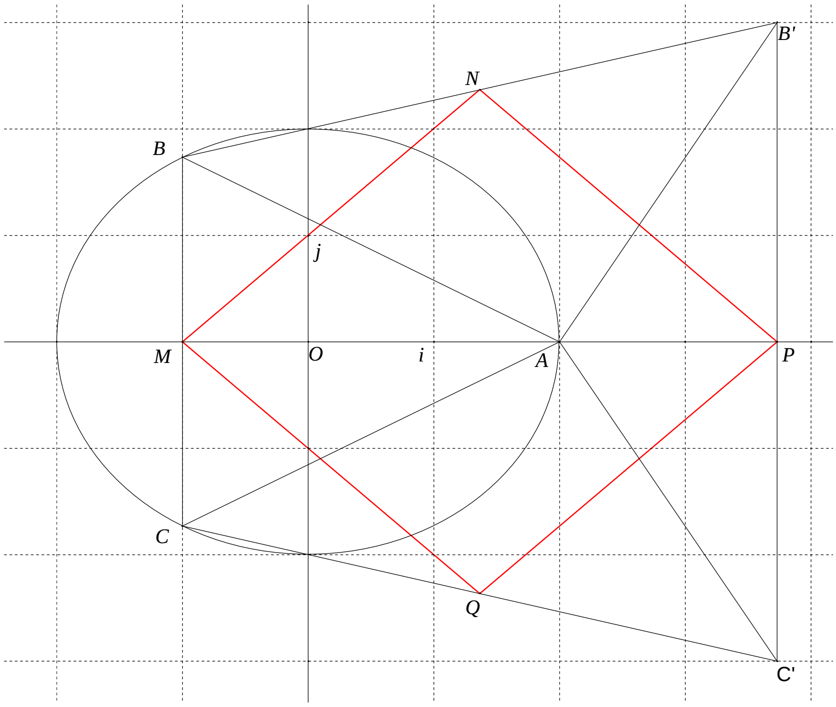
CORRIGE SUJET 51

1\. Avec *a* = *z* et *b* = 2 on a : $z^3-2^3=(z-2)(z^2+2z+4)$; $\Delta=4-16=-12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ d'où les solutions $z_0=2$, $z_1=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$, $z_2=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$.

2\. a. *a* = 2, $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-1-i\sqrt{3}$.

b. $b'-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a) \Leftrightarrow b'=2-i\left(-1+i\sqrt{3}-2\right)=2+\sqrt{3}+3i$.

c. $c'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a) \Leftrightarrow c'=2+i\left(-1-i\sqrt{3}-2\right)=2+\sqrt{3}-3i$. Qui est bien le conjugué de *b*'.



3\. a. $n=\frac{b+b'}{2}=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)\right)$ et

$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i3\right)$. C'est pareil.

$n=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}c \Leftrightarrow \overrightarrow{ON}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$, les vecteurs sont colinéaires, les points sont alignés.

b. M a pour affixe $\frac{b+c}{2}=-1$, q est le milieu de [CC'] et a pour affixe le conjugué de n (puisque c et c' sont les conjugués respectifs de b et b'), soit $q=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

On a alors $n+1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)+1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ et

$i(q+1)=i\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)+i=\frac{\sqrt{3}+3}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

d'où $n + 1 = i(q + 1)$. Le triangle MNQ est un triangle rectangle isocèle car le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{MN}$ par la rotation r.

c. Comme Q est le symétrique de N par rapport à (Ox) et que M et P sont sur (Ox), les triangles MNP et MQP sont isométriques donc $MNPQ$ est un carré.

CORRIGE SUJET 53

1. Soit on développe brutalement en utilisant le binôme de Newton, soit on calcule d'abord $(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=2\mathrm{i}$, ce qui donne $(1+i)^6=(2i)^3=-8i$. Une autre possibilité était de mettre 1 + i sous forme trigonométrique : $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ d'où $(1+\mathrm{i})^6=\sqrt{2}^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\frac{\pi}{4}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}=-8\mathrm{i}$.

2. a. Comme $(1+i)^6=-8i$, on a $\left[(1+i)^3\right]^2=-8i$ donc $(1+i)^3$ est une solution. On peut développer et trouver −2 + 2i.

b. D'une manière générale l'équation $z^2=u$ a les deux solutions $z=\sqrt{u}$ et $z=-\sqrt{u}$, soit ici l'autre racine $\mathrm{z}=-(1+\mathrm{i})^3=-(1+\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$.

3. De la même manière on peut écrire $(1+i)^6=\left[(1+i)^2\right]^3$ donc $(1+i)^2$ est une solution de (E') (on peut simplifier et trouver 2i).

4. a. La définition de r donne : $\mathrm{z}\to\mathrm{z}'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\mathrm{z}$, soit avec 2$i$:

$\mathrm{b}=2\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=2\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$; puis pour C :

$\mathrm{c}=\mathrm{be}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=2\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=2\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=2\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

b. En utilisant la forme trigonométrique on a : $b^3=\left(2ie^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=-8ie^{i\frac{6\pi}{3}}=-8i$ et la même chose pour c.

5. a. b. c. : La rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme A en B, B en C et C en A donc le triangle ABC est équilatéral de centre O qui est donc son centre de gravité.

CORRIGE SUJET 54

1. $M = f(M)$, soit $z=\frac{z-1}{z+1}\Leftrightarrow z^2+z=z-1\Leftrightarrow z^2=-1\Leftrightarrow z=\pm i$.

2. a. $(z'-1)(z+1)=\left(\frac{z-1}{z+1}-1\right)(z+1)=\frac{\cancel{z}-1-\cancel{z}-1}{z+1}(z+1)=-2$.

b. En passant la relation précédente au module, on a :
$|z'-1||z+1|=|-2| \Leftrightarrow |z'-1|=\dfrac{2}{|z+1|}$; de même en passant à l'argument :
$\arg(z'-1)+\arg(z+1)=\arg(-2)=\pi \Leftrightarrow \arg(z'-1)=\pi-\arg(z+1)$.
Ceci se traduit par : $AM'=\dfrac{2}{BM}$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=\pi-\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)$.
3. Si *M* appartient au cercle (C) de centre *B* et de rayon 2, alors $BM=2$ d'où $AM'=\dfrac{2}{2}=1$ donc *M*' appartient au cercle (C') de centre *A* et de rayon 1.
4. a. $p+1=-1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
b. On a évidemment $|p+1|=2$ donc *P* appartient au cercle (C).
c. $q=-\bar{p}=-\left(-2-i\sqrt{3}\right)=2+i\sqrt{3} \Rightarrow q+1=3+i\sqrt{3}$; par ailleurs
$\left(\vec{u};\overrightarrow{AP'}\right)=\pi-\left(\vec{u};\overrightarrow{BP}\right)=\pi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ et $AP'=\dfrac{2}{2}=1$; donc
$p'=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p'+1=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}(q+1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$.
d. La question est un peu débile puisqu'on a l'affixe de *p*' (peut-être une autre méthode était-elle attendue au 4. c. ?).