

PROF :	CHAPITRE : EQUA DIFFCOMPLEXES-FCTION EXPO	ISTAS
	DEVOIR SURVEILLE N° DE MATHEMATIQUES	DUREE

EXERCICE 1

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

- Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.
- Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$, est solution de l'équation (E).
- a. Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{-x} + x - 1.$$
Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).
b. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.
- Dans cette question, on prend $k = 1$.
a. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
b. En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.



EXERCICE 2

On considère les nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ $z_2 = 1 - i$ $z_3 = \frac{2}{z_2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

- Mettre les nombres z_3 sous forme algébrique.
- Calculer le module et un argument de z_1 , z_2 et z_3 , puis en déduire leur forme trigonométrique.
- Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .
- Démontrer que le triangle BOC est rectangle en O.
- Déterminer l'abscisse z_4 du point D pour que le quadrilatère OADC soit un parallélogramme.
on mettra le nombre complexe z_4 sous la forme algébrique.

PROBLEME

On considère la fonction f , définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = e^{2x} - 10e^x + 16$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- a) Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 8)$.
b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f .
a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = 2e^x(e^x - 5)$
b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$				7			

- a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 0.
b) Construire la droite T puis, sur le même graphique, la partie de la courbe C_f correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-3 ; 2,2]$.
c) Compléter le graphique précédent en traçant la droite d'équation $y = 16$. On mettra en évidence le point B de C_f d'abscisse $\ln 5$, ainsi que la tangente à C_f en ce point.
- a) Calculer $f(\ln 2)$. Indiquer, sans justification, le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \ln 2]$.
b) On considère le domaine plan D limité par la courbe C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$. Calculer l'aire A du domaine D . Donner une valeur approchée de A au centième.

Exercice 3

1) Soit l'équation différentielle : (H) : $y' + y = 0$ $y' = -y$ d'où $y = k e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

2) Si $g(x) = a x + b$ est solution de l'équation (E) alors on a : $a + a x + b = x$ pour tout $k \in \mathbb{R}$

$$\text{d'où } \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=1 \\ b=-a=-1 \end{cases} \text{ et } g(x) = x - 1 .$$

3) a) $f(x) = k e^{-x} + x - 1$ on a $f'(x) = -k e^{-x} + 1$, donc $f'(x) + f(x) = -k e^{-x} + 1 + k e^{-x} + x - 1 = x$.
 pour $k \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) + f(x) = x$; et f est solution de (E) .

b) $f(x) = k e^{-x} + x - 1$ si $f(0) = 0$ alors $k + 0 - 1 = 0$ d'où $k = 1$

4) a) $k = 1$ $f(x) = e^{-x} + x - 1$. $\mu = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x) dx$; $\mu = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (e^{-x} + x - 1) dx$ $\mu = \frac{1}{2} \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^2$;

$$\mu = \frac{1}{2} \left[-e^{-2} + \frac{4}{2} - 2 - (-e^0 + 0 - 0) \right] \quad \mu = \frac{1}{2} \left[-e^{-2} + 2 - 2 + 1 \right] \quad \mu = \frac{1}{2} \left[1 - e^{-2} \right] . \quad \text{b) } m = 0,43 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}$$

➤ Exercice 2

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

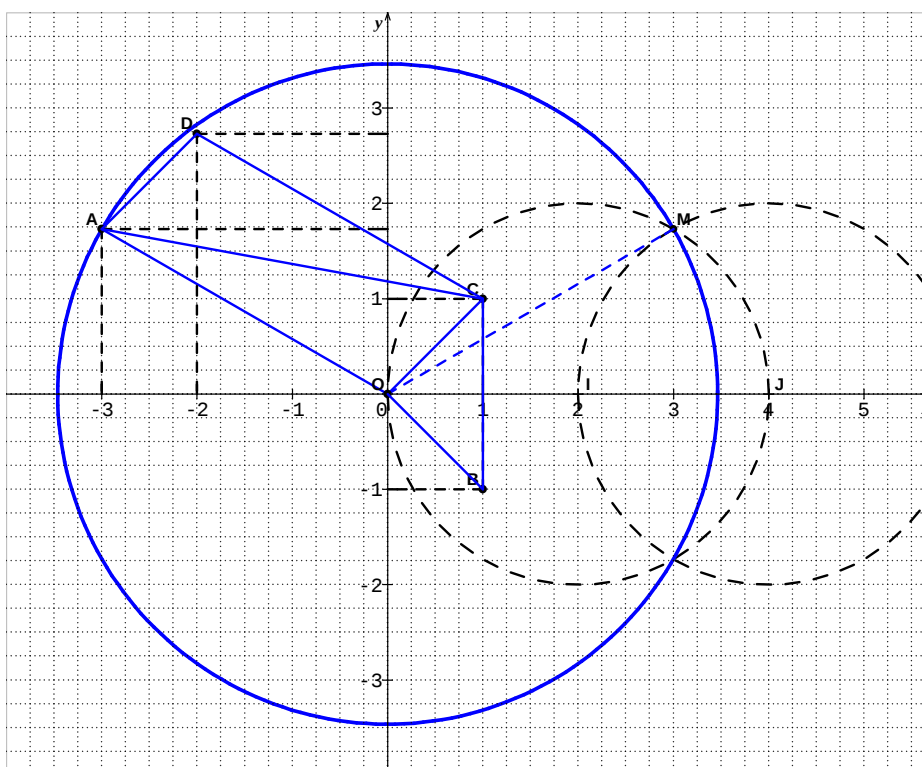
$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|z_3| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arg z_1 : \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta_2 = \arg z_2 : \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} , \text{ donc } \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} , \text{ comme } z_3 = \overline{z_2} ,$$

on a : $\arg z_2 = -\arg z_1 + 2k\pi$, donc $\theta_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$



On sait que $|z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$, on déduit que le triangle BOC est isocèle en O.

$$z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = 1+i - (1-i) = 1+i-1+i = 2i, \text{ donc } BC = |z_{\overline{BC}}| = 2$$

$BC^2 = 4$ et $OB^2 + OC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2+2=4$, on déduit que $BC^2 = OB^2 + OC^2$ et par conséquent Le triangle BOC est rectangle isocèle en O.

OADC est un parallélogramme signifie que $z_{\overline{AD}} = z_{\overline{OC}}$, donc $z_D - z_A = z_C$ ou encore

$$z_D = z_C + z_A = 1+i - 3+i\sqrt{3} = -2+(1+\sqrt{3})i$$

Corrigé

Problème1

1. Limite en $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 16$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=16$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x - 2)(e^x - 8) = e^{2x} - 8e^x - 2e^x + 16 = e^{2x} - 10e^x + 16$

2. b) Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 8) = +\infty$ Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. a. Pour tout réel x , on a : $f'(x) = 2e^{2x} - 10e^x = 2e^x(e^x - 5)$.

3. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$

De même : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

On obtient donc le tableau de signe suivant pour la dérivée et les variations de la fonction :

Avec : $f(\ln 5) = e^{2\ln 5} - 10e^{\ln 5} + 16 = e^{\ln 25} - 10 \times 5 + 16$

$$f(\ln 5) = 25 - 50 + 16 = -9$$

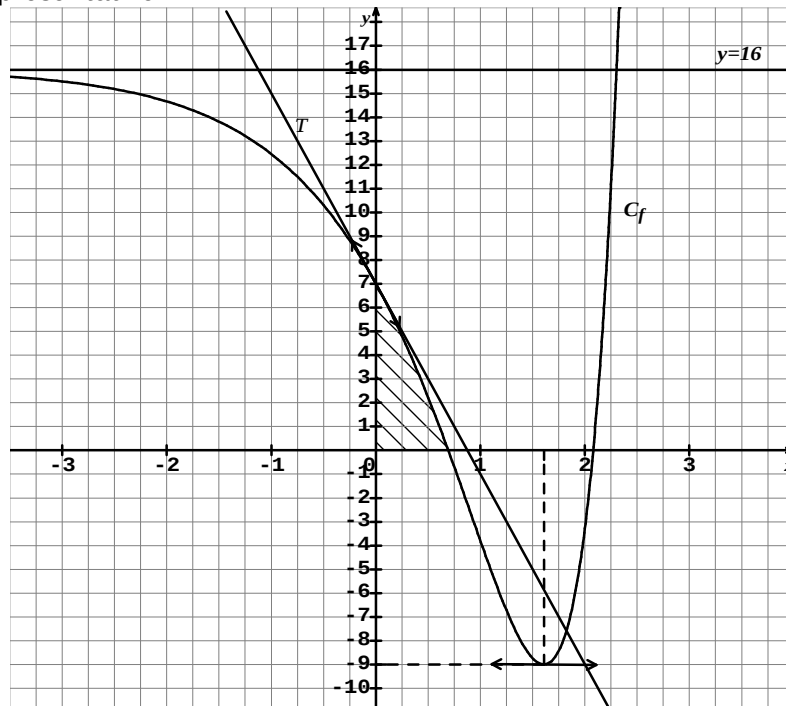
4. Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
f(x)	15,5	14,7	12,5	7	-3,8	-3,3	7,2

x	$-\infty$	$\ln 5$	$+\infty$
$e^x - 5$	-	0	+
$2e^x$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	16 +∞	-9	+

5. a) Le coefficient directeur de la droite tangente au point d'abscisse 0 est égal au nombre dérivé en 0, c'est-à-dire $f'(0)$: $f'(0) = 2e^0(e^0 - 5) = 2(1-5) = -8$

5. b) et 5. c) Courbe représentative



6. a) $f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 10e^{\ln 2} + 16 = e^{\ln 4} - 10 \times 2 + 16 = 4 - 20 + 16 = 0$

Sur l'intervalle $[0; \ln 2]$ la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x) \geq 0$.

b) Calcul de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln 2]$.

$$I = \int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 10e^x + 16)dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 10e^x + 16x \right]_0^{\ln 2} = \left(\frac{e^{2\ln 2}}{2} - 10e^{\ln 2} + 16 \times \ln 2 \right) - \left(\frac{e^0}{2} - 10e^0 + 16 \times 0 \right)$$

$$I = \left(\frac{e^{\ln 4}}{2} - 10 \times 2 + 16 \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 10 \right) = (2 - 20 + 16 \ln 2) - \left(-\frac{19}{2} \right) = -18 + 16 \ln 2 + 9,5 = -8,5 + 16 \ln 2 .$$

La fonction f étant positive sur $[0; \ln 2]$, alors l'intégrale est égale à l'aire en unité d'aires ; l'unité d'aire est

égale à $2 \times 0,5 = 1 \text{ cm}^2$ donc : $(-8,5 + 16 \ln 2) \text{ cm}^2$. 6. c) $(-8,5 + 16 \ln 2) \approx 2,59 \text{ cm}^2$