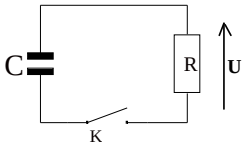
PROF :	CHAPITRE : COMPLEXES-PROBABILITE	ISTAS
	DEVOIR SURVEILLE N° DE MATHEMATIQUES	DUREE

EXERCICE 1

Un condensateur de capacité C, initialement chargé à une tension U_0 = 10 volts, se décharge à partir de l'instant
$t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R. Pour $t \geq 0$, on sait que la tension U est une fonction du temps, exprimé
en secondes, solution de l'équation différentielle (E) : $RC\,U'(t) + U(t) = 0$. On prendra $C = 15.10^{-5}$ farads et $R = 2.10^4$ ohms.



1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   b) Déterminer la fonction U solution de (E) vérifiant la condition initiale $U(t_0) = U_0 = 10$
2. à partir de quel instant t_1 la tension $U(t)$ vérifiera $U(t) \leq 1/10\ u_0$.
   On donnera la valeur exacte de t_1, puis sa valeur arrondie au dixième de seconde.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction U entre les instants t_0 et t_1.
   On en donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie au dixième de volt.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

EXERCICE 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère un polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$ où z est une variable complexe.

1. a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$.
   b. Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$.

a. Écrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres z_A et z_B.
b. Placer dans le plan P les points A et B.
c. Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. On considère la transformation R du plan P dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z' tel que $z' = e^{i\pi/3} z$.
   a. Caractériser géométriquement la transformation T.
   b. Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par la transformation R.
   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

PROBLEME

Partie I : Etude de la fonction f.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^x$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on donne $\lim_{x\to 0} x^2 e^x = 0$).
   En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera l'équation.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (2x^2 - x - 3)e^x$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c) Donner le tableau des variations de la fonction f (préciser la valeur exacte de chaque extremum).
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 3].
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre α.
4. Tracer la courbe C_f et placer son point A d'abscisse α.

***Partie II*:** On désigne par F la fonction définie sur **R** par $F(x) = \left(2x^2 - 9x + 11\right)e^x$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur **R**.

2. Calculer l'intégrale $I = \int_{0,5}^{2} f(x)dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Corrigé

Exercice1

1.a) La solution générale est : $U(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ où $A \in \mathbb{R}$. ici RC = 3 donc $U(t) = ke^{-\frac{t}{3}}$

b) Pour tout $t = t_0 = 0$ on trouve $U_0 = 10v$ donc k = 10 et $u(t) = 10e^{(-1/3)t}$, $t \geq 0$.

2. $u(t) \leq \frac{1}{10}U_0 \Leftrightarrow 10e^{-\frac{t}{3}} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{3}} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow$ □ $t/3 \leq$ □□ln 10 $\Leftrightarrow t \geq 3 \ln 10$. On a donc $t_1 = 3 \ln 10 = 6{,}9$ s au 1/10 de seconde près.

3. La valeur moyenne de u entre t_0 et t_1 est définie par : $\mu = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} u(t)dt$

Soit ici : $\mu = \frac{10}{3\ln 10}\int_0^{3\ln 10} e^{-\frac{t}{3}}dt$, $\mu = \frac{10}{3\ln 10}\left[-3e^{-\frac{t}{3}}\right]_0^{3\ln 10}$; $\mu = \frac{10}{3\ln 10}\left[3 - 3e^{-\ln 10}\right]$;

$\mu = \frac{10}{\ln 10}\left[1 - \frac{1}{10}\right]$ $\mu = \frac{9}{\ln 10} = 3{,}9\,volts$

μ = 9/ln10 = 3,9 V au 1/10 de volt.

Exercice2

Déterminons les nombres complexes a, c et c tels que $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$:

Pour tout nombre complexe z, on a :

$P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + 2az^2 + 2bz + 2c = az^3 + (b+2a)z^2 + (2b+c)z + 2c$

Or, $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$. Ainsi, par identification, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = -2 \\ 2b + c = 0 \\ 2c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - 2a = -2 - 2 = -4 \\ c = 8 \end{cases}$

D'où : $P(z) = (z+2)(z^2 - 4z + 8)$

1. b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$: Un produit de facteur est nul si au moins un des facteurs est nul

$P(z) = 0$ équivaut à $z - 2 = 0$ ou $z^2 - 4z + 8 = 0$. La solution de la première équation est 2.

Pour la deuxième équation, calculons le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$

L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$ $z_2 = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$

Les solutions de l'équation sont : $S = \{2; 2-2i; 2+2i\}$

2. a) Ecrivons sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres z_A et z_B :

$z_A = 2 - 2i$ $|z_A| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Un argument de z_A est donné par : $\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Donc un argument de z_A est $\theta_A = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

D'où : $z_A = 2\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \left[2\sqrt{2}; -\pi/4\right]$.

On sait que $z_B = \overline{z_A}$, donc $|z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = 2\sqrt{2}$

Un argument de z_B est donné par : $\arg z_B = \arg \overline{z_A} = -\arg z_A = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2. b) Plaçons dans le plan P les points A et B :

c) Nature du triangle OAB :

On a : $OA=|z_A|=OB=|z_B|=2\sqrt{2}$, donc OA = OB. Le triangle OAB est isocèle en O.

De plus, $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{OB})=-(\vec{u};\overrightarrow{OA})+(\vec{u};\overrightarrow{OB})=\arg z_B-\arg z_A=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

On en déduit alors que le triangle OAB est rectangle en O. D'où : OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

3. a) Caractérisons géométriquement la transformation T :

La transformation T est la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$

3. b) Déterminons sous forme trigonométrique l'affixe du point A' :

$$z_{A'}=e^{i\pi/3}\times z_A=2\sqrt{2}e^{i\pi/3}e^{-i\pi/3}=2\sqrt{2}e^{i(\pi/3-\pi/4)}=2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$$

Déterminons sous forme algébrique l'affixe du point A' :

$$z_{A'}=e^{i\pi/3}\times z_A=\left(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\right)(2-2i)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-2i)$$

$$z_{A'}=1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}=\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i+1=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i$$

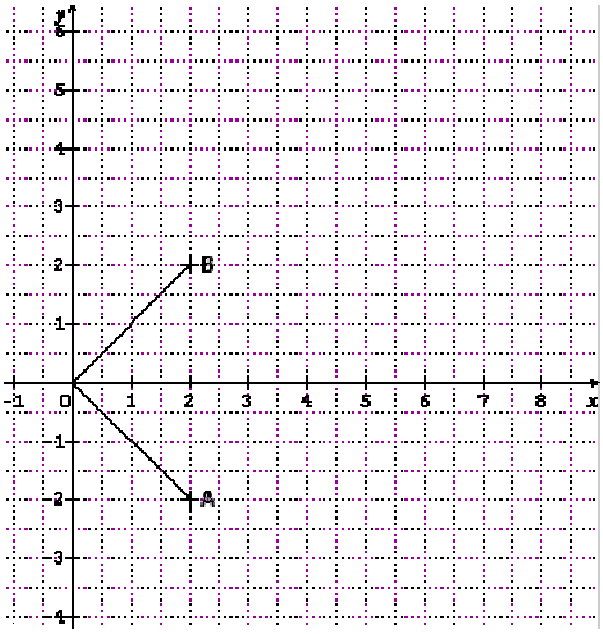
3. c) Déduisons en les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

De la question précédente, on en déduit que :

$$z_{A'}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\left(1+\sqrt{3}\right)+(\sqrt{3}-1)i$$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$



Problème5

Partie I : Etude de la fonction f.

1. a) Limite en $+\infty$: on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)e^x=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)\times\lim_{x\to+\infty}e^x$$

Or : $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2\right)=+\infty$. De plus : $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Donc : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

1. b) Limite en $-\infty$: En développant, on a : $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^x=2x^2e^x-5xe^x+2e^x$

Or : $\lim_{x\to-\infty}2x^2e^x=0$; $\lim_{x\to-\infty}5xe^x=0$ et $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ (axe des abscisses).

2. a) Calcul de la dérivée du produit $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^x$: On pose $u=\left(2x^2-5x+2\right)$ et $v=e^x$. Donc :

$u'=4x-5$ et $v'=e^x$,donc $f'(x)=(4x-5)e^x+\left(2x^2-5x+2\right)e^x=\left(2x^2-x-3\right)e^x$

2. b) Etude du signe de $2x^2-x-3$: $\Delta=(-1)^2-4\times2\times-3=25$. donc $2x^2-x-3$ admet 2 racines réelles distinctes : $x_1=\frac{1-5}{2\times2}=-1$; $x_1=\frac{1+5}{2\times2}=\frac{3}{2}$. Pour tout x réel, on a $e^x>0$ donc

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ *et* $x=1{,}5$

Le trinôme $2x^2-x-3$ est du signe du coefficient devant x^2, donc positif, en dehors des racines.

x	$-\infty$		-1		$1,5$		$+\infty$
$2x^2-x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(1,5)$	↗	0

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

2. c) $f(-1)=\left(2\times(-1)^2-5\times(-1)+2\right)e^{-1}=(2+5+2)e^{-1}=9e^{1}$ et $f(1,5)=\left(2\times(1,5)^2-5\times(1,5)+2\right)e^{1,5}=-e^{1,5}\approx-4,48$

3. a) Existence et unicité de la solution de l'équation $f(x)=2$ sur [2 ; 3] :

La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle [2 ; 3]

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle [2 ; 3] : $f(2)=0<2$ et $f(3)=100,4>2$.

Donc l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique α sur l'intervalle [2 ; 3].

On obtient les encadrements suivants pour α : $f(2,08)\approx1,74<2$ et $f(2,09)\approx2,02>2$, donc $2,08\le\alpha\le2,09$

4. voir graphique

Partie II: Calcul d'une intégrale.

1. Calcul de la dérivée du produit $F(x)=\left(2x^2-9x+11\right)e^x$:

On pose $u=2x^2-9x+11$ et $v=e^x$. Donc : $u=4x-9$ et $v'=e^x$.

$F'(x)=(4x-9)e^x+\left(2x^2-9x+11\right)e^x=\left(2x^2-5x+2\right)e^x=f(x)$ .Donc *F* est une primitive de *f*.

2. Calcul de l'intégrale I :

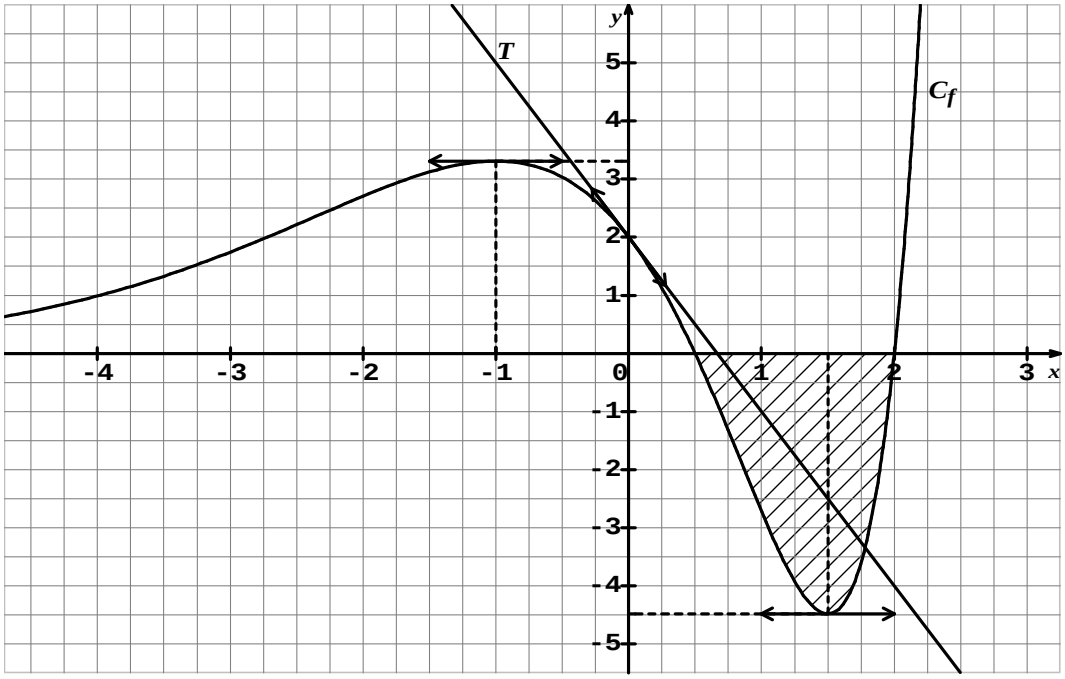
$$I=\int_{0,5}^{2}f(x)dx=\int_{0,5}^{2}\left(2x^2-5x+2\right)e^x dx=\left[\left(2x^2-9x+11\right)e^x\right]_{0,5}^{2}$$

$$I=\left(2\times2^2-9\times2+11\right)e^2-\left(2\times(0,5)^2-9\times0,5+11\right)e^{0,5}$$

$$I=e^2-7e^{0,5}\approx-4,15$$

3. Interprétation graphique de l'intégrale : On a $f(0,5)=0$ et $f(2)=0$. D'après les variations de la fonction *f*, on en déduit que $f(x)$ est négatif sur [0,5 ; 2].

L'intégrale I est donc égale à l'opposée de l'aire (en unités d'aires) délimitée par la courbe , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0,5$ et $x=2$ (voir partie hachurée sur le graphique).

L'unité d'aire associée à ce repère est égale à : $1u.a=2\times2=4cm^2$

L'aire de ce domaine est donc égal à : $A=-4\left(e^2-7e^{0,5}\right)=28e^{0,5}-4e^2$