

PROF :	CHAPITRE : COMPLEXES-PROBABILITE	ISTAS
	DEVOIR SURVEILLE N° DE MATHEMATIQUES	DUREE

EXERCICE 1

L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel (symbole dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$). On appelle u_n (où l'entier n est supérieur ou égal à 1) l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité

du son qui lui parvient (par exemple $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0$).



1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Déterminer la relation entre u_{n+1} et u_n puis exprimer u_n en fonction de u_0 et de n .
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
4. Déterminer à partir de quelle valeur de n l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2cm).

$$\text{On donne } \cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6}$$

2. On considère les nombres complexes : $z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_2 = 4e^{5i\pi/6}$ et $z_3 = 2 - 2i$

- a. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_3
- b. Ecrire z_2 sous forme algébrique.
- c. Placer dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point A , B , C d'affixes respectives z_1, z_2, z_3
- c. Déterminer le module et un argument du complexe $\frac{z_2}{z_1}$.
- d. En déduire qu'il existe une rotation de centre O qui transforme A en B.
On précisera l'angle de la rotation

PROBLEME

On considère la fonction f , définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A : Limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite D d'équation $y = 4$ est asymptote à C_f en $-\infty$.
2. a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) = (e^x - 1)(e^x - 4)$.
b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie **A. 2. a)**, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

Partie C : Etude des variations de la fonction f

1. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f .
b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
2. Montrer en détaillant vos calculs, que $f\left(\ln \frac{5}{4}\right) = -\frac{9}{4}$.
3. Dédire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f .
4. A l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie **B**, donner le tableau de signes $f(x)$ sur $\mathbf{R}$.
5. Tracer la droite D puis la courbe C_f , pour x appartenant à l'intervalle $[-4; 2]$, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : calcul d'une aire

1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbf{R}$.

2. a) Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 4$. Donner une valeur approchée au mm^2 près de cette aire.

EXERCICE 1



$$1. u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$$

Le son perd 10 % de son intensité, cela se traduit par $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$.

$$u_2 = u_1 - \frac{10}{100}u_1 = u_1 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = \frac{90}{100}u_1 = 0,9 \times 0,9u_0 = (0,9)^2 u_0.$$

$$u_3 = u_2 - \frac{10}{100}u_2 = u_2 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = \frac{90}{100}u_2 = (0,9)^3 u_0$$

2. En raisonnant comme à la première question, sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de

$$\text{l'intensité } u_n \text{ à } u_{n+1} : u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = \frac{90}{100}u_n = 0,9u_n ; \quad u_{n+1} = 0,9u_n.$$

La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$. son premier terme est u_0 . Le cours donne la

formule générale $u_{n+1} = qu_n = q^{n+1}u_0$, donc on a : $u_n = q^n u_0 = (0,9)^n u_0$ pour tout entier naturel n .

3. c. Déterminons le signe de la différence $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - u_n = -0,1u_n$

Tous les termes u_n , $n \in \mathbf{N}$, sont positifs donc la différence est négative : $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$

EXERCICE 2

$$a- |z_1| = \sqrt{4+4 \times 3} = \sqrt{16} = 4 ; \quad z_1 = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} ; \quad \arg z_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$b- |z_3| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} ; \quad z_3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{-\pi}{4} + i\sin \frac{-\pi}{4}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} ; \quad \arg z_3 = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi, \quad k' \in \mathbf{Z}.$$

$$c- z_2 = 4e^{\frac{5\pi i}{6}} = 4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i.$$

$$d- |z_2| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4 ; \quad \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{4}{4} = 1 ;$$

$$\arg \frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{4e^{i\frac{5\pi}{6}}}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}, \text{ donc le point B}$$

est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

PROBLEME

Partie A : limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Calcul de la limite en $-\infty$. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$.

Donc la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x - 1)(e^x - 4) = e^{2x} - 4e^x - e^x + 4 = e^{2x} - 5e^x + 4$.

2. b) Calcul de la limite en $+\infty$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4) = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des

abscisses

Résolution de $f(x)=0$:

$$(e^x - 1)(e^x - 4) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \text{ ou } e^x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0 \text{ ou } x = \ln 4$$

Donc les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses sont 0 et $\ln 4$.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. a) Calcul de la dérivée, en utilisant: $f'(x) = 2e^{2x} - 5e^x = e^x(2e^x - 5)$

1. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5}{2}\right). \text{ De même}$$

$$: f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

On obtient le tableau de signe suivant pour la dérivée :

2. Calcul de

$$f(5/2) = e^{2\ln(5/2)} - 5e^{\ln(5/2)} + 4 = e^{\ln(5/2)^2} - \frac{25}{2} + 4$$

$$f(5/2) = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{16}{4} = -\frac{9}{4}$$

3. On en déduit le tableau de variations suivant :

4. On en déduit le tableau de signes suivant pour la fonction f :

5. Représentation graphique

Partie D : calcul d'une aire

1. Soit F une primitive de f : $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} - 5e^x + 4x$

2. a) Soit I l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln 4]$:

$$I = \int_0^{\ln 4} f(x) dx = \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 5e^x + 4) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 5e^x + 4x \right]_0^{\ln 4}$$

$$I = \left(\frac{e^{2\ln 4}}{2} - 5e^{\ln 4} + 4\ln 4 \right) - \left(\frac{e^0}{2} - 5e^0 + 4 \cdot 0 \right)$$

$$I = \left(\frac{e^{\ln 16}}{2} - 5 \times 4 + 4\ln 4 - \frac{1}{2} + 5 \right) = \left(4\ln 4 - \frac{15}{2} \right)$$

On a montré dans la partie précédente que la fonction f est

négative sur l'intervalle $[0; \ln 4]$, donc l'aire est donnée en unités d'aires par :

$$A = -I = -4\ln 4 + \frac{15}{2} = 7,5 - 8\ln 2$$

2. b) L'unité d'aire est donnée par : $1u.a = 2cm^2$ donc :

$$A = 2 \times (7,5 - 8\ln 2) = 15 - 16\ln 2 \approx 3,91cm^2.$$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$		
	$+\infty$				
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



x	$-\infty$	$\ln(5/2)$	$+\infty$
$2e^x - 5$	-	0	+
e^x	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\begin{matrix} 4 \\ +\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} \nearrow \\ 2 \end{matrix}$	$\nearrow$

