BACCALAURÉAT BLANC — ANNÉE SCOLAIRE : **2011-2012**

SESSION DE FEVRIER - SÉRIE D — DURÉE : **4 H 00 /** Coeff. **:**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte 02 pages numérotées 1/2 et 2/2.

Exercice 1 ***(4 Points)***

On muni le plan d'un repère orthonormé dire $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. *Unité graphique:* 2 cm.

1. Soit u et v deux nombres complexes non nuls tels que $|u| = |v|$. Justifier que :
   a. Le nombre complexe $U = \dfrac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.
   b. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Démontrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est un nombre réel.
2. Soit *z* un nombre complexe différent de 1. On pose $z' = \dfrac{z-1}{\bar{z}-1}$.
   a. Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$. (On pourra poser $(z = x+iy)$. En déduire $|z'|$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   b. Soit A, B, M et M' les points d'affixes respectives 1, –1, *z* et *z'*. Calculer en fonction de *z et* $\bar{z}$ le nombre $r = \dfrac{z'+1}{z-1}$. En déduire que *r* est un nombre réel.
   c. On rappelle que, étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, la mesure principale de l'angle $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est égal à l'argument principal du nombre complexe $\dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$. Justifier que, la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}\right)$ est 0 ou π. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.
3. a. Donner une construction géométrique du point M' à partir du point *M.*
   b. Faire une figure.

Exercice 2 ***(4 Points)***

Une société de transport a déposé ses dix cars en vue d'une révision dans un garage. Devant l'impossibilité de tenir les délais, le mécanicien a procédé à la révision de seulement huit cars choisis au hasard sur dix. La société décide tout de même de mettre les dix cars en circulation.

Elle estime que :

- si un car est révisé, la probabilité qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,1 ;
- si un car n'est pas révisé, la probabilité qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,6.

1. On choisit au hasard un car sur les dix.
   a. Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé.
   b. Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.
   c. Calculer la probabilité pour qu'il n'ait pas été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.
   d. En déduire que la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est 0,2.
2. La société apprend que l'un de ses cars est tombé en panne avant la prochaine révision. Elle cherche à savoir si le car a été révisé. Calculer la probabilité pour que ce car ait été révisé.
3. On suppose que l'état de chaque car est indépendant des états des autres cars. Calculer la probabilité pour que huit cars au moins sur les dix ne tombent pas en panne avant la prochaine révision.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) *(unité: 2 cm).*

Partie A

On considère la fonction g définie, continue et dérivable sur 3 par : $g(x) = x + 1 - e^x$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

2. Calculer $g'(x)$ pour x élément de 3.
3. Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.
   En déduire le signe de *g(x)* suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie, continue et dérivable sur 3 par : $f(x) = 3\left(x^2 + x\right)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (0, I, J).

1. a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   c. Interpréter graphiquement les résultats de 1.a. et 1.b.
2. a. Démontrer que, pour tout x de 3, $f'(x) = 3\left(-x^2 + x + 1\right)e^{-x}$.
   b. Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f. On ne cherchera pas à calculer $f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
   b. Démontrer que, pour tout x de 3, $f(x) - 3x = 3xe^{-x}g(x)$.
   c. Déduire de la partie A., les positions relatives de (T) et de (C).
4. Dans le repère (O, I, J) ci-dessus, tracer avec précision la tangente (T) et la courbe (C).
   On donne : $\sqrt{25} \approx 2,2$; $f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -1,3$ et $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 2,5$.

Partie C

1. Soit la fonction F définie sur 3 par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$ où a, b et c sont des nombres réels.
   Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de f sur 3.
2. t étant un nombre réel strictement positif, calculer l'aire A (t) de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.
3. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty}$ A (t).