BACCALAUREAT BLANC Session de Avril 2012

MATHEMATIQUES

Serie : D

Durée : 4 heures

(Ce sujet comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2)

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique : 1cm), on donne les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 3+i$ et $c = 2-2i$.

1) a) Trouver une forme trigonométrique des nombres complexes a , c et $\frac{c}{a}$

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

d) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un carré puis placer le point D dans le repère.

2) p est un polynôme définie par : $p(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$

a) Déterminer les nombres complexes α et β tels que $p(z) = (z-3-i)(z^2+\alpha z+\beta)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$

c) En déduire les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $p(z) = 0$

3) M et M' sont les points d'affixes respectives z et z' tels que $z' = \frac{iz-2i-2}{z-2i}$

a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$

b) Démontrer que : $(z'-i)(z-2i) = -4-2i$, En déduire que lorsque le point M décrit le cercle(C) de centre A et de rayon $\sqrt{5}$, le point M' décrit un cercle (C')dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 2 (5 points)

Un jeu consiste à tirer au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément d'une urne qui contient six boules indiscernables au toucher dont quatre boules sont vertes et deux boules sont rouges . On admet que ces boules tirées ne sont pas remises dans l'urne. Soit A, B , C et D les événements suivants :

A : « Tirer deux boules vertes au premier tirage »
B : « Tirer deux boules rouges au premier tirage »
C : « Tirer une boule verte et une boule rouge au premier tirage »
D : « Tirer une boule verte et une boule rouge au second tirage »

1) a) Calculer p(A) , P(B) et p(C)

b) Calculer les probabilités des événements : D/A , D/B et D/C

c) En déduire les probabilités des événements $A \cap D$, $B \cap D$ et $C \cap D$ (on pourra utiliser un arbre pondéré)

d) Calculer p(D)

2) Pour participer au jeu, le joueur mise 500F. S'il tire deux fois deux boules de même couleur, il gagne le double de sa mise ; sinon, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Démontrer que $\frac{1}{5}$ est la probabilité de gagner le double de la mise .

b) Donner la loi de probabilité de X

c) Calculer E(X) et interpréter le résultat

3) Quatre élèves du lycée de Garçons Gnaléga ont joué chacun une partie de jeu.
Soit Y la somme des gains algébriques des quatre participants.

a) Etablir que l'on est en présence d'un schéma de Bernoulli

b) Donner la loi de probabilité de Y

PROBLEME (10 points)

Partie A

f est une fonction de IR vers IR définie par : $\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\sqrt{x}\ln x & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 1 cm)

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

5) On pose : $\forall x\in]-\infty;0[\ ,\ \varphi(x)=f(x)-(x+1)$

a) Démontrer que $\varphi(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e^{-2};+\infty[$

1) a) Démontrer que g est une bijection de $[e^{-2};+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Calculer g(1) et g(e) .

2) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g.

a) Donner les caractéristiques de g^{-1}

b) Démonter que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{e}$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'(\sqrt{e})$

3) Soit (Δ) la droite d'équation $y=x+1$

a) Démontrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet au point I une tangente (T) parallèle à (Δ) .

b) Construire la courbe ($\mathscr{C}$) ainsi que les droites (T) et (Δ) dans le repère (O, I, J).