

MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.

Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.

Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Soit P le polynôme de $\mathbb{C}$ défini par : $P(z) = z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$.

- 1°) a. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 .
b. En déduire que pour tout nombre complexe z , $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$ où b et c sont des nombres complexes à préciser.
- 2°) a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (-5 + i)z + 8 - 4i = 0$.
c. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
- 3°) Dans le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; I ; J)$, unité graphique 2cm, on considère les points A , B et C d'abscisses respectives $2i$, $3 + i$ et $2 - 2i$.
a. Placer les points A , B et C dans le repère orthonormé direct $(O ; I ; J)$.
b. Déterminer la nature du triangle ABC .
- 4°) Soit s la similitude directe de centre A transformant B en C .
a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s .
b. Déterminer les éléments caractéristiques de s .
c. Déterminer l'abscisse du point D qui est l'image du point C par s .
- 5°) Soit (C) le cercle de centre B et passant par le point A .
a. Déterminer l'image (C') du cercle (C) par la similitude directe s .
b. construire (C) et (C') .

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibré à 6 faces ; numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

- 1°) Démontrer que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.
- 2°) Calculer la probabilité d'obtenir trois chiffres dont la somme est égale à 6.
- 3°) Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.
- 4°) Le droit de participation au jeu est de 3000 CFA.
 - Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 CFA ;
 - S'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 CFA ;
 - S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.
 Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur à la fin du jeu (Gain algébrique d'un joueur = Somme reçue - la mise).
 - a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie.
 - d. Le jeu est-il équitable ? Justifier votre réponse.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1+x}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = -\frac{x}{2} + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}, & \text{si } x > 0 : \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J).
La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire g)

Soit g la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = e e^{\frac{1}{x}}$.

1°) a. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b. Préciser le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Justifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = x$ équivaut à l'équation $\frac{x \ln x}{x+1} = 1$.

Partie B : (Etude d'une fonction auxiliaire h)

Soit h la fonction dérivable définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$.

1°) a. Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$.

b. Etudier le sens variations de la fonction h puis dresser son tableau de variation.

2°) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]1,86 ; 1,87[$.

3°) Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]0 ; \alpha[, & h(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[, & h(x) < 0 \end{cases}$.

Partie C : (Etude de la fonction f)

1°) a. Justifier que : $\forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) = g(x)$.

b. Déterminer les limites de f à gauche en zéro, à droite en 0 et en $+\infty$.

c. Justifier que f est continue à gauche en zéro.

d. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2°) a. Calculer la dérivée f' de f et Justifier que :

$\forall x \in]0 ; +\infty[$ $f'(x)$ et $h(x)$ ont le même signe.

b. Etudier le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3°) a. Justifier que : $f(\alpha) = -\alpha + \frac{2}{\alpha} + 3$.

b. Justifier que : $f(\alpha) > 0$.

4°) a. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (Δ) et (C).

c. Etudier la position relative de (C) et (Δ) sur $]0 ; +\infty[$.

5°) Déterminer les coordonnées du point B de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (Δ).

6°) Déterminer la primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur $-\frac{1}{4}$ en 1.

7°) Construire (C), les droites (Δ) et (T) dans le repère (O ; I ; J).