MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.

Le candidat recevra 2 FEUILLES de papier millimétré.

Toute calculatrice NON GRAPHIQUE est autorisée.

EXERCICE 1Soit le nombre complexe $Z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.On note : $Z_2 = \overline{Z_1}$ où $\overline{Z_1}$ désigne le nombre conjugué de Z_1 , $Z_3 = -Z_1$ et $Z_4 = Z_1 e^{i \frac{2\pi}{3}}$.1°) Trouver la forme algébrique des nombres complexes Z_1 , Z_2 et Z_3 .2°) Trouver le module et un argument des nombres complexes Z_2 et Z_3 .3°) a. Justifier que $Z_4 = 3 e^{i \frac{5\pi}{6}}$.b. En déduire le module et un argument de Z_4 .c. Ecrire Z_4 sous forme algébrique.4°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; I; J)$. $OI = 2$ cm.On considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives Z_1 , Z_2 , Z_3 et Z_4 .

a. Placer les points A, B, C et D.

b. Calculer les distances AB, BC, DC, AC et AD.

c. Préciser la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2

Une ONG qui lutte contre la mauvaise utilisation de l'internet en milieu scolaire, fait remplir un questionnaire anonyme à chacun des élèves d'un lycée. Un quart des élèves de ce lycée est au second cycle et le reste au premier cycle. Les résultats du questionnaire sont les suivants :

- 40% des élèves du second cycle utilisent rationnellement l'internet.
- 20% des élèves du premier cycle utilisent rationnellement l'internet.

Partie A

On choisit au hasard un élève du lycée et on note :

- R l'évènement "L'élève choisi utilise rationnellement l'internet".
- S : "L'élève choisi est au second cycle".

1°) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : "L'élève choisi utilise rationnellement l'internet sachant qu'il est au second cycle".

B : "L'élève choisi est au second cycle et utilise rationnellement l'internet".

2°) Justifier que la probabilité de l'évènement R est égale à $\frac{1}{4}$.

3°) Calculer la probabilité pour que l'élève choisi soit au premier cycle sachant qu'il utilise rationnellement l'internet.

Partie B

L'ONG dispose de 5 clés internet qu'elle désire distribuer à 5 élèves tirés au hasard, successivement et de façon indépendante.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui utilisent de façon rationnelle l'internet sur les 5 élèves choisis.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) Justifier que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{5}{4}$.

3°) Calculer la probabilité qu'au moins 3 élèves sur les 5 choisis utilisent rationnellement l'internet.

4°) L'ONG prend n élèves au hasard, successivement et de façon indépendante ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$).

On note P_n la probabilité qu'au moins un élève sur les n élèves utilise rationnellement l'internet.

a. Justifier que $P_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

b. Trouver la valeur minimale de n pour qu'on ait : $P_n \geq 0,8$.

Fomesoutra.com
ca soutra !
Docs à portée de main

PROBLEME

Partie A

On donne la fonction dérivable g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x}{x+2} + \ln(x+2) - \ln x$.

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. a) Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$.

b) Etudier le sens de variation de g .

c) Dresser le tableau de variation de g .

d) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 1$.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x[\ln(x+2) - \ln x], & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm.

1. a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 2 \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$.

c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

d) Interpréter graphiquement la limite obtenue.

2. a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter graphiquement la limite obtenue.

3. a) Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x) - 1$

b) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$.

c) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

4. a) Justifier que la tangente (T) à (C) au point K(1 ; ln3) a pour équation : $y = (\ln 3 - \frac{2}{3})x + \frac{2}{3}$.

b) Tracer la droite (T) puis construire la courbe (C).

Partie C

1. Justifier que f est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $]0; 2[$.

2. a) Etudier la dérivabilité de la bijection réciproque f^{-1} de f en ln3 et calculer $(f^{-1})'(ln3)$.

[On note (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C)]

b) Trouver une équation de la tangente (T') à (C') au point d'abscisse ln3.

3. Tracer la droite (T') puis construire (C').