UP Lycée Classique d'Abidjan | Année scolaire 2016-2017

Lycée Classique d'Abidjan - GS Thanon Namanko - GS La Farandole - GS Safak - Collège Al Gadir - Collège Les Dauphins II Plateaux - Collège MISA - Collège le Serment - GS Fred et Poppée - Collège d'Application Jean Piaget - Collège Etienne

SIMILI BACCALAUREAT | Durée : 4 heures
Session d'avril 2017 | Coefficient : 4

MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Soit P le polynôme de $\mathbb{C}$ défini par : $P(z) = z^3 + (-5 - i) z^2 + (10 + 6i) z - 8 - 16i$.

1°) a. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0.
b. En déduire que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$ où b et c sont des nombres complexes à préciser.

2°) a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (-5 + i) z + 8 - 4i = 0$.
c. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

3°) Dans le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O ; I ; J), unité graphique 2cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $3 + i$ et $2 - 2i$.
a. Placer les points A ; B et C dans le repère orthonormé direct (O ; I ; J).
b. Déterminer la nature du triangle ABC.

4°) Soit s la similitude directe de centre A transformant B en C.
a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s.
b. Déterminer les éléments caractéristiques de s.
c. Déterminer l'affixe du point D qui est l'image du point C par s.

5°) Soit (C) le cercle de centre B et passant par le point A.
a. Déterminer l'image (C') du cercle (C) par la similitude directe s.
b. construire (C) et (C').

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibré à 6 faces ; numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1°) Démontrer que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.
2°) Calculer la probabilité d'obtenir trois chiffres dont la somme est égale à 6.
3°) Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.
4°) Le droit de participation au jeu est de 3000 CFA.

- Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 CFA ;
- S'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 CFA ;
- S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur à la fin du jeu (*Gain algébrique d'un joueur = Somme reçue - la mise*).
a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie.
d. Le jeu est – il équitable ? Justifier votre réponse.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1+x}{x}}, & \text{si } x<0 \\ f(x) = -\frac{x}{2} + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J).
La fonction f est dérivable en tout point de ℝ*.

Partie A : (*Etude d'une fonction auxiliaire g*)

Soit g la fonction dérivable définie sur IR* par : $g(x) = ee^{\frac{1}{x}}$.

1°) a. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b. Préciser le signe de g(x) sur IR*.

2°) Justifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, l'équation g(x) = x équivaut à l'équation $\frac{x\ln x}{x+1} = 1$.

Partie B : (*Etude d'une fonction auxiliaire h*)

Soit h la fonction dérivable définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$.

1°) a. Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$.

b. Etudier le sens variations de la fonction h puis dresser son tableau de variation.

2°) Justifier que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α sur]1,86 ; 1,87[.

3°) Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]0 ; \alpha[, & h(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[, & h(x) < 0 \end{cases}$.

Partie C : (*Etude de la fonction f*)

1°) a. Justifier que : $\forall x \in]-\infty ; 0[, \ f(x) = g(x)$.

b. Déterminer les limites de f à gauche en zéro, à droite en 0 et en $+\infty$.

c. Justifier que f est continue à gauche en zéro.

d. Justifier que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2°) a. Calculer la dérivée f ' de f et Justifier que :

$\forall x \in]0 ; +\infty[$ $f'(x)$ et h(x) ont le même signe.

b. Etudier le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3°) a. Justifier que : $f(\alpha) = -\alpha + \frac{2}{\alpha} + 3$.

b. Justifier que : $f(\alpha) > 0$.

4°) a. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (Δ) et (C).

c. Etudier la position relative de (C) et (Δ) sur $]0 ; +\infty[$

5°) Déterminer les coordonnées du point B de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (Δ).

6°) Déterminer la primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur $-\frac{1}{4}$ en 1.

7°) Construire (C), les droites (Δ) et (T) dans le repère (O ; I ; J).