SIMILI BAC
SESSION Avril 2012

**Lycée Classique d'Abidjan**

Durée : 4 H
Coefficient : 4

# MATHEMATIQUES

**SERIE D**

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3 et 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice est autorisée.

## EXERCICE 1 5 points

**Partie A :**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « A quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses.

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et parmi celles-ci, 50 vont au 1<sup>er</sup> niveau, 75 vont au 2<sup>ieme</sup> niveau et 100 vont au 3<sup>ieme</sup> niveau.
- les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2<sup>ieme</sup> niveau, les autres vont au 1<sup>er</sup> niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

-N1 : « La personne va au premier niveau. »
-N2 : « La personne va au deuxième niveau. »
-N3 : « La personne va au troisième niveau. »
-E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a Montrer que la probabilité que la personne aille au 2<sup>ieme</sup> niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.

   b. En déduire que la probabilité que la personne aille au 2<sup>ieme</sup> niveau est $\frac{1}{3}$.

   c. Montrer que les évènements N1, N2, N3 sont équiprobables.

   d. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2<sup>ieme</sup> niveau ?

3. On interroge désormais 20 personnes . On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2<sup>ieme</sup> niveau.

   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X.

   b. Déterminer, à $10^{-4}$ près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2<sup>ieme</sup> niveau.

   c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2<sup>ieme</sup> niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population.
   On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes les autres.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2<sup>ieme</sup> niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

## EXERCICE 2 5 points

1- On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - 8z^2 + 8(1 + i\sqrt{3})z - 64(1 + i\sqrt{3})$

   a) Calculer $P(8)$.

   b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

2- Le plan est muni du repère orthonormé direct (O ;I ;J). Unité graphique : 2 cm.
On considère les nombres complexes $a = -1 - i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} - i$, affixes respectives des points A et B.
Mettre a et b sous forme trigonométrique puis placer A et B dans le repère.

3-On pose $c = a^2$, $d = b^2$ et $e = a^3$ où c, d et e sont les affixes respectives des points C , D et E.
a) Déterminer le module et l'argument principal de c, d et e.
b) Placer les points C, D et E.
c) Mettre sous forme algébrique c, d et e.
d) Ecrire $\frac{c-d}{e-d}$ sous forme trigonométrique.

4- a) Déterminer Mes$(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}})$. Quelle est la nature du triangle CDE ?
b) Déterminer l'affixe du centre K et le rayon du cercle circonscrit au triangle CDE.
c) Soit F le point d'affixe $f = (3 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 5)$
Montrer que les points C, D, E et F sont cocycliques.

**PROBLEME 10 points**

L'objet de ce problème de la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = x(x - (\ln x)^2) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
Unité graphique 5 cm.

**Partie A**

On considère la fonction h dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $h(x) = 2 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$

1) a) Calculer h'(x) et étudier les variations de h.
b) En déduire que $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $h(x) \geq 0$.

2) On considère la fonction g dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $g(x) = 2x - 2\ln(x) - (\ln x)^2$
a) Calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
b) Calculer g'(x) et montrer que g'(x) = h(x).
c) Etudier les variations de g.
d) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique a et vérifier que $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$.
e) Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in ]0;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

**Partie B**

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est continue en 0.
3) a) Etudier la dérivabilité de f en 0.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.
4) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
b) Interpréter les résultats.
c) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(-\alpha + 2\ln(\alpha))$
5) a) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Calculer f '(x) et montrer que $\forall x \in ]0; +\infty[$, f'(x) = g(x).
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

**Partie C**

1) Déterminer une équation de la tangente (T) à ( C) au point d'abscisse 1.
2) Soit la fonction $k(x) = f(x) - (2x-1)$
   a) Vérifier que $k'(x) = g(x) - 2$ et que $k''(x)=h(x)$
   b) En déduire le sens de variation de k' .Calculer k'(1) puis donner le signe de k'.
   c) Dresser le tableau de variation de k puis donner le signe de k.
   *(On ne calculera pas de limites).*
   d) En déduire la position relative de (C ) et de la droite (T).
3) Tracer (C ) et (T) . On prendra $\alpha = 0,1$.

4) Soit la fonction q , restriction de f à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$
   a) Montrer que q admet une bijection réciproque notée $q^{-1}$ dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.
   b) Dresser le tableau de variation de $q^{-1}$.
   c) Calculer $q(1)$ , $q^{-1}(1)$ et $(q^{-1})'(1)$.
   d) Construire la courbe de $q^{-1}$ dans le même repère que ( C).