Lycée Sainte Marie — **DST DE MATHEMATIQUES** — 25 11 2020 — Durée : 3h

T^le D

Exercice 1

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x+3}{-2x^2+5x-3} - 8x\sqrt{-3x+2}$ b) $g(x) = \frac{-x+2}{|-2x^2+5x|-3}$ c) $h(x) = \sqrt{8-|7x-6|}$

d) $m(x) = \frac{-5x+\sin x}{1+2\cos 3x}$ e) $t(x) = \sqrt{2+\sin x}$ et f) $m(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{-\cos x}$

Exercice 2

Calcule chacune des limites suivantes

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} \frac{1-x^2}{-x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{3x-1} - \frac{1}{5}x + 1$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \cos\left(\frac{-5\pi x+2}{1-4x}\right)$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \left|\frac{-3}{x-1} + x\right|$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 + 5x^2\sqrt{x} + 7x - 14$; f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x^3}-2x}{-x^2+x}$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-8x^2+9x+2}{|4+5x|+23x}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5-4x}{\sqrt{x^2+x+3}} + 7$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-7x+3} - 2\sqrt{-x-1}$; j) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \frac{\sin(1-3x)}{6x-2}$ on pourra poser $X = 1-3x$; k) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{-x^2+x+6}{8+x^3}$

l) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x - \sin x + 1}{x-\pi}$; m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x}$; n) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{5x^3+x^2+1} - 10x$; p) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{2}{x^7} - \frac{3}{4x^9}$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{11}(1-5x)^9 + 6(1-5x)^8 - (1-5x)^6 + 10x - 2$ et s) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} 2\cos x - 3\sin x$

Exercice 3

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{-31+4x\sqrt{x}\cos 7x}{2x^2+9x-5}$

a) Etudie le signe de l'expression $2x^2+9x-5$ selon les valeurs de x

b) Justifie que pour tout x de $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$; $\frac{-31-4x\sqrt{x}}{2x^2+9x-5} \leq f(x) \leq \frac{-31+4x\sqrt{x}}{2x^2+9x-5}$

c) Déduis-en $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement les résultats

2) a) Démontre que pour tout nombre réel x, on a : $1+\cos x+\sin x = 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$

b) Déduis-en $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}$

Exercice 4

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$f(x) = \sqrt{x^2-x+5}$ et $g(x) = -3x^5 + 2\left(\frac{x-4}{5x+7}\right)\left(\frac{-8x+1}{17-9x}\right)$

1) Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de f

2) Calcule la limite en $\frac{17}{9}$ de la fonction g et interprète graphiquement le résultat

3) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$; et interprète graphiquement les résultats

Lycée Sainte Marie — DST — Mercredi 13 Janvier 2021

Terminales D — DE MATHEMATIQUES — Durée :4h

EXERCICE

Les parties 1 et 2 sont indépendantes

Partie 1

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + 1$

où a,b et c sont des nombres réels non nuls.

1) Pour tout x de IR ,calcule la dérivée $f'(x)$
2) La courbe (C_f) de f passe par le point de coordonnées $(1;-12)$ et admet une tangente horizontale en chacun des points d'abscisses -1 et 2.
   a) Justifie que les nombres réels a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} a+b+c = -13 \\ -4a-2b+c=0 \\ 32a+4b+c=0 \end{cases}$
   b) Détermine les nombres réels a, b et c.

Partie 2

Soit g la fonction de IR vers IR définie par $g(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 1$

1) Pour tout x de IR ,calcule la dérivée $g'(x)$ puis justifie que $g'(x) = 4(x-2)(x+1)^2$
2) a) Justifie que : $\forall x \in [3;4]$, $64 \leq g'(x) \leq 200$
   b) Utilise l'inégalité des accroissements finis pour montrer que :
   $\forall x \in [3;4]$, $64x - 189 \leq x^4 - 6x^2 - 8x \leq 200x - 597$
3) a)Etudie sur IR les signes de $g'(x)$ et donne le sens de variation de g
   b) Sans les calculer, comparer en le justifiant les deux nombres :

   A=$(1{,}3467809)^4 - 6(1{,}3467809)^2 - 8(1{,}3467809) + 1$
   et B=$(1{,}3467819)^4 - 6(1{,}3467819)^2 - 8(1{,}3467819) + 1$
4) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[-1;0]$
   a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont tu donneras l'ensemble de définition
   b) Calcule $h(-1)$ et justifie que h^{-1} n'est pas dérivable en 4 .
   c) Justifie que h^{-1} est dérivable en 1 puis donne la valeur exacte de $(h^{-1})'(1)$
   d) Ecris une équation de la tangente (T) à la courbe de h^{-1} au point d'abscisse 1.
   e) Résous dans $[-1;0]$ l'équation $h'(x) = 0$ et déduis-en que l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} est $[1;4[$
5) Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm, construis la courbe de h , celle de h^{-1} , la droite (T) et la tangente (T') à la courbe de h^{-1} au point d'abscisse 4.

PROBLEME

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = |3-x| - \frac{1}{x+1}$; et (C_f) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1cm.

1) a)Donne l'ensemble de définition D_f de la fonction f et calcule les limites de la fonction f aux bornes de D_f
   b) Interprète graphiquement si possible ces résultats.

2) Vérifie que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 3] \setminus \{-1\}, f(x) = -x + 3 - \frac{1}{x+1} \\ \forall x \in [3; +\infty[, \quad f(x) = x - 3 - \frac{1}{x+1} \end{cases}$

3) a) Justifie que f dérivable à gauche en 3 et précise le nombre dérivé de f à gauche en 3
   b) Etudie la dérivabilité de f en 3
   c) Détermine les équations des tangentes à gauche et à droite à la courbe (C_f) au point d'abscisse 3.

4)a) Vérifie que la droite (Δ_1) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ puis détermine la position de (C_f) par rapport à (Δ_1) sur $]-\infty; -1[$
   b)Justifie que (C_f) possède en $+\infty$ une asymptote oblique (Δ_2) dont tu donneras une équation.

5)Pour $x \in]3; +\infty[$,calcule $f'(x)$ et justifie que f est strictement croissante sur $]3; +\infty[$

6) a) Pour $x \in]-\infty; 3[\setminus \{-1\}$,calcule et justifie que $f'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$
   b) Déduis-en le sens de variation de f sur chacun des intervalles: $]-\infty; -2]$,$[-2; -1$[, $]-1; 0]$ et $[0; 3[$.

7) Dresse le tableau de variation de la fonction f

8) a) Démontre que (C_f) coupe l'axe des abscisses en trois points A, B et C d'abscisses respectives α_1 , α_2 et α_3 avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.
   b) Vérifie que : $3{,}2 < \alpha_3 < 3{,}3$
   c) Justifie que $f'(\alpha_1) > f'(\alpha_2)$
   d) Déduis-en que les tangentes à (C_f) aux points A et B sont sécantes

9) Place les points A, B, C et construis (C_f), ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses -2 , 0 et 3.

10) Soit m un nombre réel. Discute graphiquement, selon les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation (E_m) : $x \in IR, f(x) = m$.

Lycée classique d'Abidjan	Devoir de mathématiques Durée : 2 heures Date : 30/11/2020	Année scolaire 2020-2021 Terminale D.

EXERCICE 1

$(O\,;I;\,I)$ est un repère du plan.
(C) est la représentation graphique d'une fonction f ; d'ensemble de définition D_f
Pour chaque proposition répond par vrai ou faux. (Exemple : 6- vrai ou 6- faux.)

1	Si f est continue sur un intervalle K alors f réalise une bijection de K dans $f(K)$
2	a est un réel ; $a \notin Df$ et la limite de f en a est infinie. Donc f n'est pas prolongeable par continuité en a.
3	Si $f(x) = \frac{x^2+x-6}{4-x^2}$; $x \neq 2$ et $f(2) = -\frac{5}{4}$ alors f est continue en 2.
4	Si $f(x) = \frac{-1+x\sqrt{x}}{x}$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

EXERCICE2

Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées dont une, et une seule est exacte. Indique la réponse exacte en notant par exemple : $1.a$ ou $1.b$ ou $1.c$

	Affirmations	a	b	c
1	$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \sqrt{x^2-1}+3x =$	$+\infty$	0	$-\infty$
2	$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x+1 =$	$-\infty$	0	2
3	Si f et g sont des fonctions telle que $f \leq g$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	$+\infty$	0	$-\infty$
4	Si $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	1	On ne peut conclure

EXERCICE 3

Calcule la limite de f dans chaque cas.

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\frac{3x-2}{2-x}} - \frac{1}{x}}{\sqrt{2-x^2}-1}$ en 1

2) $f(x) = \dfrac{sin(tanx)}{tanx}$ en π

3) $f(x) = \dfrac{1+cosx}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

4) $f(x) = \dfrac{-1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ en 0 à gauche

EXERCICE4

Soit g la fonction définie par ; $\begin{cases} g(x) = \frac{1-cos2x}{x^2}, \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ g(x) = \frac{-x}{|x|} + 1, \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\\ g(0) = 2 \end{cases}$

Etudie la continuité de g en 0

EXERCICE 5

On donne, ci-dessous, le tableau de variation d'une fonction f continue sur son ensemble de définition$]-3; 1[\cup]1; +\infty[$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

x	-3		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2 ‖ 2	↘	-3

1) Précise les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ en justifiant ta réponse.
2) a) Justifie que f est prolongeable par continuité en 1.
   b) Définis le prolongement par continuité de f en 1.
3) Détermine l'image de l'intervalle $]-3; 1[$ par f.
4) On désigne par h la restriction de f sur $]1 ;+\infty[$.
   a) Justifie que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans un intervalle K que l'on précisera.
   b) Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection reciproque de h sur son ensemble de définition.
   c) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]1 ; +\infty[$.
5) Détermine le signe de f sur son ensemble de définition.

DREN ABIDJAN 1
LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN
08 BP 39 ABIDJAN 08
TEL : 22 44 35 17
PROF : M. KOFFI DENIS

ANNEE SCOLAIRE 2020 – 2021
CLASSE : TD_{15}
DUREE : 01 h 30 mn

DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUE

EXERCICE

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

1) Déterminer D_h, l'ensemble de définition de la fonction h.
2) h admet – elle un prolongement par continuité en 1 ? Si oui définir ce prolongement continu

PROBLEME

Soit la fonction f *definie* sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 -4}{x^2+1}$ de représentation graphique (Cf) dans un repère orthonormé (O, I, J). $(Unité : 1\ cm)$

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction g definie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$

1) a) Calculer les limites de g $en\ -\infty\ et\ en\ +\infty$.
   b) Calculer $g'(x)$ $pour\ tout\ x\ de\ \mathbb{R}$.
   c) Etudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2) a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et justifier que $-2 < \alpha < -1$

   b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

   c) Justifier que : $\forall\ x \in]-\infty;\ \alpha[\ , g(x) < 0\ et\ \forall\ x\ \in\ ]\alpha. +\infty[\ , g(x) > 0$.

PARTIE B : *Etude de la fonction* f.

1) Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f.
2) a) Démontrer que $\forall\ x\ \in\ D_f, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.

   b) En utilisant les résultats de la question 2c/ de la partie A, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{-3(\alpha+4)}{\alpha^2+1}$. Pour $\alpha = -1{,}5$, $calculer\ f(\alpha)$.

4) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ $et + \infty$.

   b) Etudier la position relative de (Cf) et (D).

5) Construire la droite (D) $et\ la\ courbe$ (Cf) dans le même repère $(O; I; J)$.