BACCALAUREAT BLANC — SERIE D — Coefficient : 4

SESSION FEVRIER 2013 — *MATHEMATIQUES* — Durée : 4 heures

Fomesoutra.com ça soutra !

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3 . Le candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité 2 cm. Soit B , C , D et H les points d'affixes respectives $b = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$, $c = \sqrt{3} + i$, $d = 1 - i\sqrt{3}$ et $h = \frac{dc}{b^3}$.

1. a) Ecrire les nombres complexes b , c et d sous forme trigonométrique.
   b) En déduire la forme trigonométrique du nombre complexe h .
   c) Justifier que h^{1932} est un nombre réel strictement négatif.

2. a) Construire avec précision (en expliquant la méthode) les points B , C et D.

   b) Justifier que le triangle DOC est rectangle isocèle

3. a) Déterminer l'affixe du point E pour que $CODE$ soit un carré.

   b) Déterminer l'affixe du point F pour que O soit le centre de gravité du triangle BCF.

   c) Placer les points E et F.

4. a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe h.

   b) En déduire les valeurs exactes de $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

EXERCICE 2

Un dé parfait possède : une face marquée 0 ; deux faces marquées – 2 et trois faces marquées 1.

I. On lance une fois le dé et on lit le numéro marqué sur la face supérieure.
   Calculer la probabilité d'obtenir chaque numéro.

II. Une expérience $\mathcal{E}$ consiste à lancer deux fois de suite le dé. On note a le numéro lu au premier lancer et b celui du deuxième lancer. On obtient ainsi le résultat $(a ; b)$ de $\mathcal{E}$.

1. Justifier que la probabilité d'obtenir des numéros identiques est $\frac{7}{10}$

2. Pour un résultat $(a ; b)$ obtenu, on écrit le nombre complexe $z = a + ib$ et on place son point image M dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I , J) d'unité 2cm.
   a) Placer tous les points images possibles.
   b) Déterminer la probabilité de chacun des événements :

   E_1 « M est sur la droite d'équation $y = x$ » et E_2 « OJM est un triangle rectangle »

Lycée Sainte Marie- Lycée Sainte Marie- Lycée Sainte Marie - Lycée Sainte Marie- Lycée Sainte Marie- Lycée Sainte Marie Lycée Sainte

Fomesoutra.com
ça soutra !

3: Soit A le point d'affixe $-1-i$ et (Γ) le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$.
On désigne par Y la variable aléatoire égale à la distance AM.

a) Montrer que Y prend exactement trois valeurs que l'on précisera.

b) Justifier que la probabilité l'événement $(Y = \sqrt{5})$ est $\frac{1}{2}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de Y.

d) Vérifier que l'espérance mathématique de Y est $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{4}$

e) Montrer que la probabilité que le point M se place à l'extérieur du cercle (Γ) est $\frac{3}{4}$

4. On pratique n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) la même expérience $\mathcal{E}$, en espérant placer une fois au moins le point M à l'intérieur du cercle (Γ)

a) Quelle est la probabilité P_n de le réaliser ?

b) Au bout de combien de fois peut-on le réaliser à plus de 98,95 % ?

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) avec OI = 2 cm

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{2x^2}{x^2+1} + ln(x^2+1)$.

1. Calculer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{-2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

3. Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

4. a) Justifier que sur $]0 ; +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Montrer que $1,98 < \alpha < 1,99$.

5. Etudier la parité de h. En déduire que $-\alpha$ est une racine de h.

6. Démonter que :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; -\alpha[\cup]\alpha ; +\infty[& h(x) > 0 \\ \forall x \in]-\alpha ; 0[\cup]0 ; \alpha[& h(x) < 0 \\ \forall x \in \{-\alpha ; 0 ; \alpha\} & h(x) = 0 \end{cases}$$

Lycée Sainte Marie-Lycée Sainte Marie-Lycée Sainte Marie - Lycée Sainte Marie-Lycée Sainte Marie-Lycée Sainte Marie Lycée Sainte

Fomesoutra.com
ça soutra !

PARTIE B

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{3x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et (C_g) est sa courbe représentative dans $(O ; I ; J)$

1. Montrer que g est impaire.
2. a) Calculer la limite à droite de g en 0 (on pourra poser $X = x^2$)
   b) En déduire la limite à gauche de g en 0 puis que g est continue en 0.
3. a) Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = \frac{1}{3}$
   b) Donner une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0.
4. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{2\ln|x|}{3x} + \frac{1}{3x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.
   b) En déduire les limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de g.
   c) Interpréter graphiquement ces limites.
5. a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \frac{-h(x)}{3x^2}$
   b) Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
   c) Justifier que $g(\alpha) = \frac{2\alpha}{3(\alpha^2+1)}$ puis en déduire $g(-\alpha)$ en fonction de α.
   d) Déterminer $g([-1;2[)$
6. Construire (T) et (C_g). On prendra $\alpha = 1{,}98$.
7. a) Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[$, $\frac{2\ln x}{x} \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln 2}{x}$.
   b) En déduire que : $\frac{2}{3e} \leq g(e) \leq \frac{2+\ln 2}{3e}$
8. Soit f la restriction de g à l'intervalle $K =]-\alpha ; 0[$.
   a) Justifier que f réalise une bijection de K sur un intervalle L à préciser.
   b) Calculer $f(-1)$ puis justifier que la réciproque f^{-1} de f est dérivable en $-\ln(\sqrt[3]{2})$.