BACCALAUREAT BLANC	SERIE D	Coefficient : 4
LYCEE SAINTE MARIE DE COCODY		
SESSION FEVRIER 2014	*MATHEMATIQUES*	*Durée : 4 heures*

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3 ;2/3 et 3/3 . Le candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1

Les questions 1 ; 2 et 3 sont indépendantes

1) Linéariser sin^4x et en déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t : x \mapsto sin^4x$

2) Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$; $2\ln(2x-1) - ln(3x-2x^2) \geq ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$

   a) Déterminer l'ensemble de validité E_V de (E)

   b) Justifier que $(E) \Leftrightarrow x \in E_V$; $5x^2 - 11x + 5 \geq 0$.

   c) En déduire les solutions de l'équation (E).

3) a) Trouver les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x on a

$$\frac{\sin(2x) + 8\,sinx}{(3\,cosx + 5)^2} = \frac{a\,sin\,x}{3\,cosx + 5} + \frac{b\,sinx}{(3\,cosx + 5)^2}$$

   b) En déduire la primitive sur $\mathbb{R}$ de $k : x \longmapsto \frac{\sin(2x) + 8\,sinx}{(3\,cosx + 5)^2}$ qui prend la valeur -1 en $\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) et les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $-z^2 + 2z - 4 + 4i = 0$.

2) Soit P, R et Q les points d'affixes respectives $-2i$; $2 + 2i$ et q tel que $\frac{2i + q}{2 + 4i} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

   a) Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

   b) Déterminer sous forme algébrique le nombre complexe q.

   c) Construire les points P, Q et R. Unité 2cm

3) Soit S le symétrique de Q par rapport à la droite (PR).

   Vérifier que I est le milieu de $[RP]$ et justifier que $PQRS$ est un losange.

Partie B

On donne la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $f(z) = \dfrac{2iz-4i\sqrt{3}}{z+2i}$

1) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $4-4i\sqrt{3}$ et $2+2i$

2) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et trouver z_0 tel que $f(z_0) = i$

3) Pour tout $z \neq -2i$, on pose $r = |z+2i|$ et $\theta = arg(z+2i)$

a) Justifier que $|f(z) - 2i| = \dfrac{8}{r}$ et que $arg(f(z) - 2i) = -\dfrac{\pi}{3} - \theta$

b) Déterminer une valeur de θ pour laquelle $f(z) - 2i$ est un réel strictement négatif.

4) Soit A et B les points du plan d'affixes respectives $-2i$ et 2 .

On note (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z) - 2i| = 2\sqrt{2}$

et (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $arg(f(z) - 2i) = \dfrac{-7\pi}{12}$

a) Vérifier que $f(2) - 2i = \dfrac{4-4i\sqrt{3}}{2+2i}$ et justifier que $B \in (\Gamma) \cap (\Delta)$

b) Justifier que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ)

c) Justifier que $M \in (\Delta) \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{AM}}) = \dfrac{\pi}{4}$. En déduire l'ensemble (Δ)

d) Construire les ensembles (Γ) et (Δ) sur une autre figure. Unité 2cm.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -6x + (x+9)\sqrt{x}$.

(C_f) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité 1cm.

1) Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = -3 + (4 - \sqrt{x})\sqrt{x}$.

a) Vérifier que pour tout nombre réel positif on a : $g(x) = (-1 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})$

b) Déterminer les racines de g puis justifier que $\begin{cases} pour\ x \in [0 : 1[\cup]9 ; +\infty[& g(x) < 0. \\ pour\ x \in]1 ; 9[& g(x) > 0 \end{cases}$

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) En déduire que la droite (OJ) est la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 .

3) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis justifier que (C_f) possède en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

4) a) Justifier que pour tout nombre réel strictement positif, on a $f'(x) = \frac{-3\,g(x)}{2\sqrt{x}}$

b) Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5) a) Vérifier que $f'(3) = 3(\sqrt{3} - 2)$

b) Démontrer que $y = 3(\sqrt{3} - 2)(x - 3 - 2\sqrt{3})$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 3.

6) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - 3(\sqrt{3} - 2)(x - 3 - 2\sqrt{3})$

a) Vérifier que pour tout nombre réel strictement positif, $f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} - 4 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

b) En déduire que pour tout nombre réel strictement positif, $h''(x) = \frac{3(x-3)}{4x\sqrt{x}}$ où h'' est la dérivée seconde de la fonction h.

c) Déterminer sur $]0; +\infty[$ le sens de variation de h'.

d) Calculer $h'(3)$ puis justifier que h' est positive ou nulle sur $]0; +\infty[$.

e) Dresser le tableau de variation (sans les limites) de h

f) Calculer $h(3)$ et en déduire les signes de h.

7) Déterminer les positions de (T) et (C_f)

8) Construire la tangente (T) et la courbe (C_f) . On prendra $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$

9) Soit k la restriction de f à $[1; 9]$

a) Justifier que k admet une bijection réciproque k^{-1} dont on dressera le tableau de variation.

b) Calculer $k(4)$ puis étudier la dérivabilité de k^{-1} en 2.

c) Justifier que k^{-1} n'est pas dérivable en 0 et en 4.

d) Tracer dans le même repère orthonormé $(O, \ , J)$ la courbe $(\ )$ de k^{-1} ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 4.