

*Rectification au verso*

LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN NIVEAU : Terminale D	DEVOIR DE MATHÉMATIQUES Durée : 4h	Année scolaire 2020-2021 11/02/2021
--	---------------------------------------	---

**EXERCICE 1** (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Si $z = (1 - \sqrt{5}) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ alors un argument de $z$ est $\frac{\pi}{3}$
2	Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ , $ z  =  z' $ équivaut à $z = z'$ ou $z = -z'$
3	$f$ et $g$ sont des fonctions telles que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} fog(x) = 2$
4	La fonction $x \mapsto 2 + \cos^5 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -5 \sin x \cos^5 x$

**EXERCICE 2** (2 points)

Pour chaque affirmation du tableau, choisis la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses		
		a	b	c
1	X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,62$ . La probabilité à $10^{-3}$ près de l'événement $X \geq 1$ est égale à :	0,8	0,908	0,992
2	On admet que $\forall x \in ]0; 10]$ , $f'(x) = \ln x - \frac{x}{2} + 1$ . La courbe $(C_f)$ admet sur l'intervalle $]0; 10]$ un point d'inflexion d'abscisse :	1,2	0,9	2
3	Le nombre complexe $u = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ est une	racine huitième de l'unité	racine sixième de l'unité	racine quatrième de l'unité
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sin \frac{2}{x} \right)$ est égale à	0	2	$+\infty$

**EXERCICE 3** (3,5 points) Commun à tous sauf les classes de TD2 et TD3

1. Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes  $1 + i$  et  $\sqrt{3} + i$ .

2. On donne le nombre complexe  $u = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ .

a) Ecris  $u$  sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

b) Déduis – en les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$  d'unité graphique 3 cm.

$A, B$  et  $C$  sont les points d'affixes respectives  $1 + i, \sqrt{3} + i$  et  $1 + i\sqrt{3}$ .

a) Justifie que les points  $B$  et  $C$  appartiennent au cercle de centre  $O$  et de rayon 2.

b) Déduis-en la construction des points  $B$  et  $C$ .

c) Démontre que  $ABC$  est un triangle rectangle et isocèle en  $A$ .

d) Démontre que les droites  $(OA)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires

4. A tout point  $M$  d'affixe  $z$  on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{z - \sqrt{3} - i}{z - 1 - \sqrt{3}i}$ .

Détermine l'ensemble  $(D)$  des points du plan tels que  $|z'| = 1$ . Construis  $(D)$ .

#### EXERCICE 4 (5 points)

I. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calcule les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ . (en 0 on pourra poser  $x = \sqrt{x}$ ).
2. Etudie la dérivabilité de  $g$  en 0. Interprète graphiquement le résultat.
3. a) Démontre que  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = -(2 + \ln x)\ln x$   
b) Etudie les variations de  $g$  et dresse son tableau de variation.
4. a) Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]\frac{1}{2}; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que  $2 < \alpha < 2,1$ .  
b) Justifie que : 
$$\begin{cases} \forall x \in [0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

II. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par : 
$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x \ln x}$$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  d'unité graphique 4cm. On admet que  $\forall x \in ]0; +\infty[, 1 + x \ln x > 0$ .

1. Calcule les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Interprète graphiquement les résultats.

2. a) Démontre que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x \ln x)^2}$

b) Etudie les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation.

3. Démontre que  $f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\alpha}}}$

4. Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $]0, \alpha]$ .

a) Justifie que  $h$  admet une bijection réciproque  $h^{-1}$ .

b)  $h^{-1}$  est-elle dérivable en  $\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\alpha}}}$ ? Justifie ta réponse.

5. ~~Construis  $(C)$ . On prendra  $f(\alpha) = 0,3$~~

#### EXERCICE 5 (3,5 points)

Cinq amis nommés A, B, C, D et E achètent en commun une photocopieuse.

Pour des raisons de surface disponible, cette photocopieuse peut être entreposée chez A ou B.

On procède à un vote à bulletin secret pour savoir chez lequel de A ou de B elle sera entreposée. Chacun

des cinq amis fait un choix et un seul sur l'une des deux personnes A ou B.

Le résultat d'un vote noté  $(A, B, B, A, A)$  signifie que : A a voté pour A, B a voté pour B, C a voté pour B, D

a voté pour A et E a voté pour A.

1. Justifie qu'il y a 32 résultats possibles.

2. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui, au résultat de chaque vote, associe le nombre de voix obtenues par A.

a) Justifie que  $p(X = 0) = p(X = 5) = \frac{1}{32}$

b) Etablis la loi de probabilité de  $X$ .

c) Justifie que l'espérance mathématique de  $X$  est :  $E(X) = \frac{5}{2}$