LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN NIVEAU : Terminale D	DEVOIR DE MATHEMATIQUES Durée : 4h	Année scolaire 2020-2021 11/02/2021

EXERCICE 1 (2 *points*)

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	$Si\ z = (1-\sqrt{5})\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ alors un argument de z est $\frac{\pi}{3}$
2	Pour tous nombres complexes $z\ et\ z'$, $\lvert z\rvert = \lvert z'\rvert$ équivaut à $z = z'$ ou $z = -z'$
3	$f\ et\ g\ sont\ des\ fonctions\ telles\ que\ si\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2\ et\ \lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty\ alors\ \lim\limits_{x\to+\infty} fog(x) = 2$
4	La fonction $x \mapsto 2 + cos^5 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -5sinxcos^5 x$

EXERCICE 2 (2 *points*)

Pour chaque affirmation du tableau, choisis la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses		
		a	b	c
1	X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 5\ et\ p = 0{,}62$. La probabilité à 10^{-3} près de l'événement $X \geq 1$ est égale à :	0,8	0,908	0,992
2	On admet $que\ \forall x\epsilon]0;10], f'(x) = lnx - \frac{x}{2} + 1$ La courbe (C_f) admet sur l'intervalle $]0;10]$ un point d'inflexion d'abscisse :	1,2	0,9	2
3	$Le\ nombre\ complexe\ u = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad est\ une$	racine huitième de l'unité	racine sixième de l'unité	racine quatrième de l'unité
4	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xsin\frac{2}{x}\right)\ est\ égale\ à$	0	2	$+\infty$

EXERCICE 3 (3,5 *points*) Commun à tous sauf les classes de TD2 et TD3

I. Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes $1+i$ et $\sqrt{3}+i$.

2. On donne le nombre complexe $u = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

a) Ecris u sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique .

$b)$ Déduis – en les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ $et\ sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 3 cm.

A , B et C sont les points d'affixes respectives $1+i$, $\sqrt{3}+i$ et $1+i\sqrt{3}$.

a) Justifie que les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b) Déduis-en la construction des points B et C.

c) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

d) Démontre que les droites (OA) et (BC) sont perpendiculaires

4. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-\sqrt{3}-i}{z-1-\sqrt{3}i}$.

Détermine l'ensemble (D) des points du plan tels que $\lvert z'\rvert = 1$. Construis (D).

EXERCICE 4 (5 *points*)

I. On considère la fonction g définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 - x(lnx)^2 \ si\ x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$. (en 0 on pourra poser $X = \sqrt{x}$).

2. Etudie la dérivabilité de g en 0. Interprète graphiquement le résultat.

3. a) Démontre que $\forall x \in [0;\ +\infty[, g'(x) = -(2 + lnx)lnx$

   b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

4. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0;\ +\infty[$ une unique solution α et que $2 < \alpha < 2{,}1$.

   b) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in [0;\ \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

II. Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{lnx}{1 + xlnx}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 4cm. On admet que $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ 1 + xlnx > 0$.

1. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interprète graphiquement les résultats.

2. a) Démontre que $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1 + xlnx)^2}$

   b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

3. Démontre que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$

4. Soit h la restriction de f à $]0\ ,\ \alpha]$.

   a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1}.

   b) h^{-1} est − elle dérivable en $\dfrac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$? Justifie ta réponse.

~~5. Construis (C). On prendra $f(\alpha) = 0{,}3$~~

EXERCICE 5 (3,5 *points*)

Cinq amis nommés A, B, C, D et E achètent en commun une photocopieuse.

Pour des raisons de surface disponible, cette photocopieuse peut être entreposée chez A ou B.

On procède à un vote à bulletin secret pour savoir chez lequel de A ou de B elle sera entreposée. Chacun des cinq amis fait un choix et un seul sur l'une des deux personnes A ou B.

Le résultat d'un vote noté (A, B, B, A, A) signifie que : A a voté pour A, B a voté pour B, C a voté pour B, D a voté pour A et E a voté pour A.

1. Justifie qu'il y a 32 résultats possibles.

2. On désigne par X la variable aléatoire qui, au résultat de chaque vote, associe le nombre de voix obtenues par A.

   a) Justifie que $p(X = 0) = p(X = 5) = \dfrac{1}{32}$

   b) Etablis la loi de probabilité de X.

   c) Justifie que l'espérance mathématique de X est: $E(X) = \dfrac{5}{2}$

$d)$ Vérifie que la probabilité p_1 que la photocopieuse soit entreposée chez A est égale à $\frac{1}{2}$.

3. A chaque début d'année, on effectue un vote, dans les mêmes conditions. On suppose que les votes sont des événements indépendants. Calcule la probabilité p_2 pour que A soit choisi pendant trois années consécutives.

EXERCICE 6 (4 *points*)

Lors de la fête de fin d'année, une enquête faite par le conseil scolaire du lycée classique auprès d'un échantillon d'élèves de Terminales C et D révèle que :

- 25% des élèves aiment jouer au basketball sachant qu'ils sont en Terminale C.
- Un tiers des élèves aiment jouer au basketball sachant qu'ils sont en Terminale D.
- Trois élèves sur dix aiment jouer au basketball.

Eric ,le responsable des jeux et loisirs du conseil scolaire, choisit au hasard un élève de cet échantillon .
On note les événements suivants :
D : « L'élève choisi est en Terminale D »
B : « L'élève choisi aime jouer au basketball »
Eric ne se souvient pas de la probabilité de choisir un élève de terminale D.
Pour écrire son rapport il vient te voir et te sollicite afin que tu l'aides à trouver cette valeur.
A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances en Mathématique, détermine la probabilité de choisir un élève de Terminale D.

EXERCICE 7 (Uniquement pour la TD2 et la TD3)

I.

1. Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur l'intervalle K de la fonction f.

$a)\ f(x) = \dfrac{-4x-2}{(x^2+x+1)^2} \quad ; K = \mathbb{R}$

$b)\ f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^3}} + \dfrac{1-2x}{\sqrt{3x^2-3x+5}} \quad ; K = \mathbb{R}$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ par $g(x) = \dfrac{-3x^2+4x+5}{(2x+1)^2}$

a) Détermine trois réels a, b et c tels que $g(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{(2x+1)^2}$

b) En déduis la primitive G de g sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ qui prend la valeur 1 en 0

II.

On considère les fonctions h et k définies sur $]0;+\infty[$ par $k(x) = x^2 \ln x$ et $h(x) = x \ln x$

1) Calcule $k'(x)$ pour $x > 0$

2) Vérifie que $\forall\, x > 0,\ k'(x) - x = 2h(x)$