Lycée Classique d'Abidjan
CE MATHEMATIQUES

Année scolaire 2020/2021
Niveau : terminale D

EXERCICE 1

1- On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $h(x) = 2x - x^2$

a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$

b) En déduire que l'image de l'intervalle $[0;1]$ par h est l'intervalle $[0;1]$

2- Soit u la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$

b) Démontrer que la suite u est croissante.

c) Justifier que la suite u est convergente.

3- On considère la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(1 - u_n)$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Calculer la limite de la suite v.

d) En déduire la limite de la suite u

EXERCICE 2

Soit a un nombre réel donné. On considère les suites u et v définies respectivement par :

- $u_0 = 3,\ u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 u_{n+1} + (a-2)u_n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$

1. On pose : $a = 1$

a) Démontrer que la suite v est constante et donner sa valeur.

b) En déduire que u est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

2. On pose : $a = -5$

a) Démontrer que v est une suite géométrique dont la raison est égale à 7

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n la somme T_n où $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

d) Exprimer u_n en fonction de T_n

e) En déduire que la suite u est divergente.

EXERCICE 3

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq -1$

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$

3) Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n + 1\ \ (n \in \mathbb{N})$

a) Prouver que la suite (v_n) est majorée.

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = -2^{n+1}$

DEVOIR DE CLASSE TC3 (MATHEMATIQUES)

Durée : 2h (14h45 à 16h45)

EXERCICE 1 BARYCENTRE - LIGNES DE NIVEAU : (9 POINTS)

On considère un triangle équilatéral ABC de coté a (a > 0) et I le milieu de [BC]. On désigne par D le barycentre du système de points pondérés {(A, 2) ; (B, -2) ; (C, -1)}.

1. a) Montre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et construis le point D.
   b) Soit E le milieu de [CD], montre que ABDE est un parallélogramme. On note O son centre.
   c) Ecrie le point O comme barycentre des points A, B et C.
2. Démontrer que : $CD^2 = 4a^2, BD^2 = 3a^2$ et $AD^2 = 7a^2$.
3. Pour tout point M du plan, on pose $f(M)=2MA^2-2MB^2-MC^2$ et $g(M)= 2MA^2-MB^2-MC^2$.
   a) Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que f(M)= 0.
   b) Soit (F) l'ensemble des points M du plan tels que g (M)= a². Vérifier que C appartient à (G). Puis détermine et construis (G).
   c) Soit J le point d'intersection autre que C des ensembles (E) et (F). Démontre que le triangle CDJ est équilatéral.

EXERCICE 2 LIMITES ET CONTINUITE : (11 POINTS)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = x - 1 - 2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1. Justifie que $D_f =]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$ puis détermine les limites de f aux bornes de cet ensemble de définition. En déduis que (C) admet une asymptote parallèle à l'un des axes, que tu préciseras.
2. Démontre que les droites d'équation $y = -x - 2$ et $y = 3x$ sont asymptotes à (C).
3. a. Démontre que l'on a l'équivalence $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$.
   b. Déduis-en que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
   c. Détermine alors le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

Lycée classique d'Abidjan — Année scolaire 2019 2020

COMPOSITION DU PREMER TRIMESTRE DE MATHEMATIQUES
NIVEAU : TERMINALE C
DATE : Mercredi 13 Novembre 2019
Durée : 3H

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a = 2\ cm$ et de centre de gravité G. On définit les trois barycentres suivants $G_1 = bar\{(A,-3)\ ;\ (B,3\ );\ (C,2)\}$, $G_2 = bar\{(A,2);\ (B,-3);\ (C,3)\}$ et $G_3 = bar\{(A,3);\ (B,2);\ (C,-3)\}$

1) Démontrer que les deux triangles ABC et $G_1G_2G_3$ ont le même centre de gravité.

2) Soit $(\Gamma) = \left\{M \in P;\ -3MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2 = \frac{8}{3}\right\}$

a) Vérifier que G appartient à (Γ).

b) Déterminer alors (Γ) , puis construire (Γ).

3) Soit $(\Delta) = \{M \in P;\ 2MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = 0\}$

a) On pose $g(M) = 2MA^2 - 3MB^2 + MC^2$.

Justifier chacune des égalités suivantes : $G_2A^2 = 9;\quad G_2B^2 = 19;\ G_2C^2 = 7$

b) Déduire de ce qui précède que pour tout point M du plan :

$$g(M) = 4\overrightarrow{G_2M}.\overrightarrow{G_2C} - 32.$$

c) Déterminer alors (Δ), puis construire (Δ).

EXERCICE 2

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5

2) Quel est le reste de la division euclidienne de 1357^{2019} par 5 ?

3) Montrer que pour tout entier naturel n $5^{2n} - (-23)^n$ est divisible par 24

4) Pour quelles valeurs de n, $2n^2 - 10n + 8$ est – il divisible par 5 ?

Lycée classique d'Abidjan

Annee scolaire 2019 2020

PROBLEME

PARTIE A

Soit u la fonction définie de ℝ vers ℝ par $u(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

1) a) Ecrire u(x) sans la valeur absolue

b) Démontrer que l'équation u(x) = 0 admet pour unique solution $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(On n'étudiera pas la fonction u)**

2) a) Résoudre l'inéquation : $x \in]-\infty ; -1]$, $u(x) < 0$

b) Résoudre l'inéquation : $x \in [-1 ; 0]$, $u(x) > 0$

c) En déduire que pour $x \in]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}[$, $u(x) < 0$ et pour $x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$, $u(x) > 0$

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). **Unités graphiques utilisées: 2 cm sur chaque axe.**

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définies par: $f(x) = \frac{x+1}{x + \sqrt{|x^2 - 1|}}$ et de représentation graphique (C_f)

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

b) Calculer la limite de f à gauche et à droite en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Donner une interprétation graphique du résultat.

2) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Donner une interprétation graphique du résultat.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Donner une interprétation graphique des résultats.

4) a) Etudier la dérivabilité de f en -1

b) Déterminer une équation réduite de la tangente (T) à (C_f) en -1

c) Etudier la dérivabilité de f en 1. Donner une interprétation graphique du résultat.

5) a) Montrer que pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-\sqrt{x^2-1} - (x+1)}{u^2(x)\sqrt{x^2-1}}$

b) En déduire que pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$

6) a) Montrer que pour $x \in \left]-1 ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right[$, $f'(x) = \frac{x + 1 - \sqrt{1-x^2}}{u^2(x)\sqrt{1-x^2}}$

b) Déterminer le signe de f '(x) sur $\left]-1 ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right[$

7) Dresser le tableau de variation de f

8) Construire la courbe représentative de f

PARTIE C

1) a) Démontrer que f réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}

2) Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère que (C_f)