LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN CLASSE : TD8	DEVOIR DE MATHEMATIQUES Durée : 2h	Année scolaire 2021-2022 21/10/2021

EXERCICE 1 ($2\ points$)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	$Soit\ f\ et\ g\ des\ fonctions\ telles\ que\ \forall x \in]-\infty; 0[, g(x) \geq f(x)$. $Si\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ alors\ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
2	$Si\ f\ est\ une\ fonction\ telle\ que\ \forall x \neq -1,\quad 2 - \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 3 - \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. $alors\ \lim_{x\to0} f(x) = 3$
3	$Le\ plan\ est\ muni\ d'un repère\ (O, I, J)$. $La\ représentation\ graphique\ de\ toute\ fonction\ f\ définie\ sur\ ]0;+\infty[$ $telle\ que\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,\quad admet\ en\ +\infty\ une\ branche\ parabolique\ de\ direction\ (OI)$
4	$Si\ f\ est\ une\ fonction\ continue\ et\ strictement\ décroissante\ sur\ [a; +\infty[\ alors\ f([a; +\infty[) = \left]f(a); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

EXERCICE 2 ($2\ points$)

Ecris le numéro de chaque proposition du tableau suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

Exemple : 5a

N°	proposition	Réponses a	b	c
1	$\lim_{x\to2} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1}{x^2 - 4} =$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{1}{4}$	0
2	Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet :	au moins une solution dans $]a; b[$	une unique solution dans $]a; b[$	aucune solution dans $]a; b[$
3	$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) =$	0	1	$+\infty$
4	Pour tout nombre réel strictement positif a et Pour tous nombres entiers naturels n $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a^{6n}}}$ est égal à :	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a^n}$	a^2
5	$\lim_{x\to0}(x^2 - 2) =$	-2	0	$+\infty$

EXERCICE 3 ($6\ points$)

A – On donne la fonction g de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$.

1) Justifier que g est définie sur $[-1; 3[U]3; +\infty[$.
2) Peut – on prolonger la fonction g par continuité en 3 ? Si oui , préciser le prolongement.

B – Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{1-|x-1|}$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$
2) a) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[, f(x) = \frac{x+1}{x}$ $et\ \forall x \in [1; 2[\cup]2; +\infty[, f(x) = -\frac{x+1}{x-2}$

   b) Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0 et en 2, et la limite de f en $+\infty$ $et\ en\ -\infty$.

   Interpréter graphiquement les résultats .

3) Etudier la continuité de f en 1.

EXERCICE 4 (5 *points*)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$,par : $h(x) = x^3 - 3x - 3$

1) a) calculer les limites de h $en + \infty$ et $en - \infty$.
   b) Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

2) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\propto$ dans $]1; +\infty[$.

3) Justifier que : $2{,}10 < \propto < 2{,}11$.

4) Donner le signe de h suivant les valeurs de x.

EXERCICE 5 (5 *points*)

Une coopérative fabrique de la conserve de tomate qu'elle conditionne dans des boîtes de 100g. Les boites sont rangées dans des cartons en raison de 50 boîtes par carton. Le coût journalier de la production et la recette journalière sont définis respectivement par $c(x) = x^3 - 50x + 800$ et $R(x) = 142x - 120$ où $c(x)$ et $R(x)$ sont exprimés en milliers de Francs et x le nombre de milliers de cartons. La coopérative peut produire par jour entre 2000 et 12000 cartons de conserve.

Le comptable de la coopérative affirme que pour ne pas travailler à perte, il faut que la production journalière soit comprise entre 5820 cartons et 10000 cartons.

A l'aide de tes connaissances mathématiques, justifie cette affirmation du comptable.