



## DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES Tle D :

25 /10/2021

Durée : 2h

Ce sujet comporte deux pages

**EXERCICE1 : ( 2 points)** Pour chacune des affirmations suivantes recopie le numéro de la ligne suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou Faux si l'affirmation est fausse.

1. Soit  $U$  l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.  
Si  $E$  et  $F$  sont deux événements de  $U$  de probabilités non nulles, alors  $P_F(E) = P_E(F)$ .
2. Si  $f$  est une fonction continue et strictement décroissante sur  $[-2 ; 3]$  et si  $f(-2) \times f(3) < 0$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]f(3) ; f(-2)[$ .
3.  $A$  et  $B$  étant deux événements indépendants d'un univers  $\Omega$ , on a  $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .
4. Soit  $f$  une fonction d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$ . Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $I$  alors sa bijection réciproque  $g$  est strictement décroissante sur  $I$ .

**EXERCICE2 : ( 2 points)** Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

| N° | ENONCES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |  | Réponses    |                 |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|-------------|-----------------|------------------------|---------|----|----|-------------|----|----|---|-----------------|
| 1  | Soit $f$ une fonction et $\alpha$ un nombre réel. S'il existe une fonction $g$ telle que $f \geq g$ sur l'intervalle $] \alpha ; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$                                                                                                                                                                        |  |  | A           | 0               |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | B           | $-\infty$       |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | C           | $+\infty$       |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | D           | $\alpha$        |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
| 2  | <table><tr><td></td><td>Fait la maladie</td><td>Ne fait pas la maladie</td></tr><tr><td>Vacciné</td><td>15</td><td>25</td></tr><tr><td>Non vacciné</td><td>18</td><td>12</td></tr></table> <p>Ce tableau donne les résultats d'une enquête effectuée dans une population de 70 personnes. On choisit au hasard un individu. La probabilité que cet individu fasse la maladie sachant qu'il est vacciné est</p> |  |  |             | Fait la maladie | Ne fait pas la maladie | Vacciné | 15 | 25 | Non vacciné | 18 | 12 | A | $\frac{15}{70}$ |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |             | Fait la maladie | Ne fait pas la maladie |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | Vacciné     | 15              | 25                     |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | Non vacciné | 18              | 12                     |         |    |    |             |    |    |   |                 |
| B  | $\frac{15}{33}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |             |                 |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
| C  | $\frac{15}{40}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |             |                 |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
| D  | $\frac{33}{40}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |             |                 |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
| 3  | $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt[3]{a^5 b} \times \sqrt[3]{ab^5} =$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  | A           | $a^5 b^5$       |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | B           | $ab$            |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | C           | $a^{12} b^{11}$ |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | D           | $a^4 b^3$       |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
| 4  | $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos\left(\frac{\pi x + 15}{x - 1}\right) =$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |  | A           | $-\infty$       |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | B           | $+\infty$       |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | C           | $\pi$           |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | D           | n'existe pas    |                        |         |    |    |             |    |    |   |                 |

**EXERCICE3 : ( 7 points)**

$f$  est une fonction continue sur son ensemble de définition, de représentation graphique  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  et admettant le tableau de variation ci-dessous :

|        |           |      |           |       |           |
|--------|-----------|------|-----------|-------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-3$ | $2$       | $4,5$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-1$      | $0$  | $-\infty$ | $9,5$ | $1$       |

- Détermine l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .
- Précise les asymptotes éventuelles à  $(C_f)$ . Justifie ta réponse.
- $f$  est-elle prolongeable par continuité en 2 ? en 4,5 ? Si oui définis ces prolongements.
- Détermine les images par des intervalles  $]-\infty; 2[$  et  $]4,5; +\infty[$  par  $f$ .
- Démontre que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]2; 4,5[$ .
- Détermine le signe de  $f$  sur  $D_f$ .
- Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]-\infty; -3[$ .
  - Justifie que  $g$  réalise une bijection de  $]-\infty; -3[$  dans un intervalle  $J$  à déterminer.
  - Dresse le tableau de variation de  $g^{-1}$ , bijection réciproque de  $g$  sur son ensemble de définition.
- Calcule les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(2 - \frac{1}{x})$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-3}{5-3f(x)}$

**EXERCICE4 ( 4 points)** Une urne contient 5 boules : 3 blanches et 2 noires.

On tire au hasard une boule de l'urne, puis sans la remettre dans l'urne, on en tire une seconde.

On note :  $B_1$  l'évènement « la 1<sup>ère</sup> boule tirée est une boule blanche » ;

$N_1$  l'évènement « la 1<sup>ère</sup> boule tirée est une boule noire » ;  $B_2$  l'évènement « la seconde boule tirée est une boule blanche » ;  $N_2$  l'évènement « la seconde boule tirée est une boule noire ».

- Construis l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
- Donne les probabilités suivantes :
  - $P(N_1)$
  - $P_{N_1}(B_2)$ .
- Justifie que  $P(N_1 \cap B_2) = 0,3$
  - Calcule  $P(B_2)$ .

**EXERCICE5 (Situation complexe) ( 5 points) :**

Un cordonnier fabrique des sacs à main. Il réussit à vendre tous ses sacs chaque mois à des touristes. Sa marge bénéficiaire mensuelle en centaines de francs est modélisée par la fonction

$$B(x) = x^3 - \frac{75}{2}x^2 + 450x + 150, \quad x \text{ représentant le nombre de sacs fabriqués et vendus.}$$

Il aimerait connaître l'intervalle de sa marge bénéficiaire pour un nombre de sacs fabriqués compris entre 5 et 17.

En te basant sur tes connaissances mathématiques et à l'aide d'un raisonnement cohérent, aide ce cordonnier à répondre à sa préoccupation.