

Conexion BAC BLANC Série F2

Fomesoutra.com
sa souter !
Docs à portée de main

①

Exercice 1

$$0 < \theta < \pi, \quad z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$$

1) module de z.

$$|z| = \sqrt{(-\sin 2\theta)^2 + (2\cos^2 \theta)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2 2\theta + 4\cos^4 \theta}$$

$$|z| = \sqrt{(2\sin \theta \cos \theta)^2 + 4\cos^4 \theta}$$

$$|z| = \sqrt{4\cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4\cos^4 \theta}$$

$$|z| = \sqrt{4\cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}$$

$$|z| = \sqrt{4\cos^2 \theta} = 2|\cos \theta|$$

$$\text{si } \theta \in]0; \frac{\pi}{2}[, |z| = 2\cos \theta$$

Car $\cos \theta > 0$ 0,1

$$\text{si } \theta \in]\frac{\pi}{2}; \pi[, |z| = -2\cos \theta$$

Car $\cos \theta < 0$ 0,1

Argument de z : $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$. On a l'argument de z

$$\cos \beta = \frac{-\sin 2\theta}{2\cos \theta} = \frac{-2\sin \theta \cos \theta}{2\cos \theta} = -\sin \theta$$

$$\cos \beta = -\sin \theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \beta = \frac{2\cos^2 \theta}{2\cos \theta} = \cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \beta = -\sin \theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \beta = \cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \arg(z) = \theta + \frac{\pi}{2}$$
40

2. Valeur de θ .

$$|z| = |1-z| \Leftrightarrow \sqrt{(-\sin 2\theta)^2 + (2\cos^2 \theta)^2} = \sqrt{(1+\sin 2\theta)^2 + (2\cos^2 \theta)^2}$$

$$\sin^2 2\theta + 4\cos^4 \theta = 1 + 2\sin 2\theta + \sin^2 2\theta + 4\cos^4 \theta$$

$$1 + 2\sin 2\theta = 0$$

$$2\sin 2\theta = -1$$

$$\sin 2\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\theta = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \theta = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$$

①

Fomesoutra.com

ça s'entraîne !

Docs à portée de main

Exercice 2.

① (E): $z^3 - (2+3i)z + 3iz - (4+6i) = 0$

1. (E'): $z^2 - z - 2 = 0 \quad z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-2) \cdot (1)$$

$$\Delta = 9$$

$$z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$S_{\mathbb{C}} = \{-1; 2\}$ ①

2. Développement:

$$\begin{aligned} [z - (2+3i)][z^2 - z - 2] &= z^3 - z^2 - 2z - (2+3i)z^2 + (2+3i)z + 2(2+3i) \\ &= z^3 + [-1-2-3i]z^2 + (-2+2+3i)z + 4+6i \end{aligned}$$

$$= z^3 + (-3-3i)z^2 + 3iz + 4+6i$$

$$[z - (2+3i)][z^2 - z - 2] = z^3 - (3+3i)z^2 + 3iz + 4+6i \quad \text{O.R.}$$

b. Les solutions de E st:

$$[z - (2+3i)][z^2 - z - 2] = 0 \Leftrightarrow z - (2+3i) = 0 \text{ ou } z^2 - z - 2 = 0$$

$$z = 2+3i$$

$$z_1 = -1 \text{ ou } z_2 = 2$$

$S_{\mathbb{C}} = \{2+3i; -1; 2\}$ O.R.

b. Calcul de a' , b et c'

$$a' = 2i(-1) + 1 - 2i$$

$$a' = -2i + 1 - 2i$$

$$a' = -4i + 1 \quad (0,25)$$

$$b = 2i(2+3i) + 1 - 2i$$

$$b = 4i - 6 + 1 - 2i$$

$$b = 2i - 5 \quad (0,25)$$

$$c' = 2i(2) + 1 - 2i$$

$$c' = 4i + 1 - 2i$$

$$c' = 2i + 1 \quad (0,25)$$

c. $A'B'C'$ est un triangle rectangle en C' car l'image d'un triangle par une similitude est un triangle. De plus les similitudes directes conservent les angles. (0,1)

Fomesoutra.com

ça s'entraîne !

Docs à portée de main

d. Calcul de $w = \frac{c' - b}{c - b}$

$$w = \frac{2i + 1 - 2i + i}{2 - 2 - 3i} = \frac{i}{-3i}$$

$$w = -2i$$

forme trigo : $w = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right)$ (0,1)

forme expo : $w = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (0,1)

e. Valeur de w . $-2i$

mesure de l'angle $(\vec{BC}, \vec{BC'}) = -\frac{\pi}{2}$ (0,1)

f. les droites (BC) et $(B'C')$ sont perpendiculaires. (0,1)

Problème (0,1)

(3)

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$$

Partie A

1. sens de variations de g.

calcul de $g'(x)$

$$g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x.$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

$$\textcircled{0,1} g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

Tableau de Variation

* sens de V.

$\forall x \in]0; 1[$ g est strictement décroissante
sur $]0; 1[$ (0,2)

$\forall x \in]1; +\infty[$ g est strictement croissante
sur $]1; +\infty[$

	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		4	

signe de $g'(x)$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$

pour $g'(x)$ a le signe du numérateur

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Tableau de signe sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

$\forall x \in]0; 1[$ $g'(x) < 0$

$\forall x \in]1; +\infty[$ $g'(x) > 0$

$$\text{or } x = 1 \quad g'(x) = 0$$

Fomesoutra.com

ça s'entraîne !

Docs à portée de main

2. signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

le minimum de g est 4. donc $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ (0,2)

Partie B

1. Calcul de $f(1)$.

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1} + \frac{1-1}{2} = 0.$$

(0,25)

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x} \right) = -\infty$

(0,25)

Calcul de $f(e)$.

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} + \frac{e^2-1}{2e}$$

$$f(e) = \frac{1}{e} + \frac{e^2-1}{2e} = \frac{2+e^2-1}{2e}$$

$$f(e) = \frac{e^2+1}{2e}$$

(0,25)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x} = -\infty \end{array} \right.$$

Interprétation : la droite d'éq^{te} $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

(0,25)

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x} \right) = +\infty$

(0,25)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x} = +\infty \end{array} \right.$$

4. Calcul de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} + \frac{2x(2x) - 2(x^2-1)}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{4x^2 - 2x^2 + 2}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 - 4\ln x + 2x^2 + 2}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4\ln x + 2x^2 + 6}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(-2\ln x + x^2 + 3)}{2 \cdot 4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

(1)

Sens de variations de f

Sens de variations

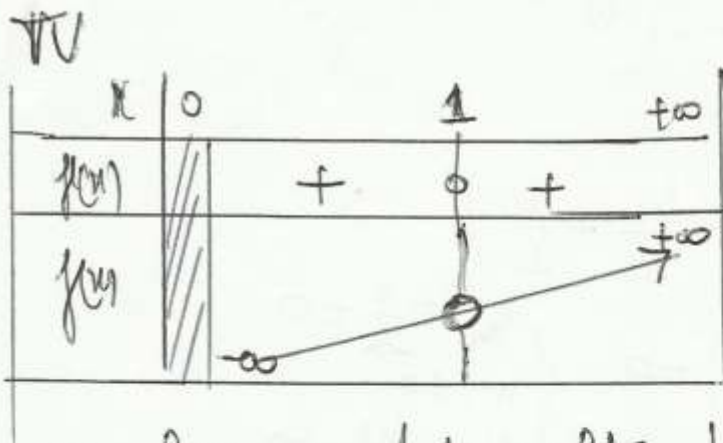
Une I.o.t.o.t., $2x^2 > 0$ dc $f'(x)$ est du signe du numérateur
par qpt une I.o.t.o.t., $f'(x) > 0$

Variations

(0,5)

Une]o;+∞[, $f'(x)$ est strictement croissante sur]o;+∞[

(4)



5. $f(x) = 2$ admet une solution de $]3; 4[$.

Sur $]1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$
 par conséquent f réalise une bijection sur $]1; +\infty[$. On a:

$]3; 4[\subset]1; +\infty[$ donc f réalise également une bijection sur $]3; 4[$
 de plus, $f([3; 4]) =]1,69; 2,22[$ et $2 \in]1,69; 2,22[$,
 $2 \in]$, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution

unique $\alpha \in]3; 4[$.

Valeur approchée de α

Fomesoutra.com
 ça soutra !
 Docs à portée de main

La méthode de recherche n'étant pas précisée, On peut considérer
 le centre de l'intervalle $]3; 4[$ peut être considéré comme une
 valeur app. de α .

On a: $\alpha \approx \frac{1,69 + 2,22}{2} = 1,95$

une valeur app de α est 1,95.

$\alpha \approx \frac{3+4}{2}$
 $\alpha \approx 3,5$

6. On $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$; On a: $\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2}{2x} - \frac{1}{2x}$
 $= \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$

$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$

Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(n) - \frac{1}{2}n]$ (0,25)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(n) - \frac{1}{2}n] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{\ln n}{n} - \frac{n}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2n} + \frac{\ln n}{n} \right) = 0\end{aligned}$$
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \end{cases}$$

Interpretations

$y = \frac{1}{2}n$ est l'oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

7. Equation de la tangente en 1

$$\begin{aligned}\text{On a: } y &= f'(1)(n-1) + f(1) \\ &= \frac{f(1)}{2}(n-1) + 0\end{aligned}$$

$$(T_1): y = 2x - 2 \quad (0,5)$$

8. Tracer de $\mathcal{C}$.

 **Fomesoutra.com**
ça s'entraîne !

Docs à portée de main

Partie c $F(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

(5)

1. Calcul de $F'(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x - \frac{1}{2x} + 2 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \ln x$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \quad (0,25)$$

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
Docs à portée de main

2. Calcul de A

$$A = 4 \times [F(e) - F(1)]$$

$$= 4 \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$A = e^2 - 1 \quad (0,25)$$

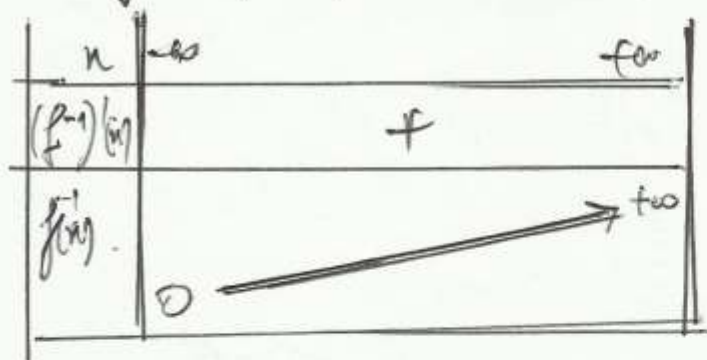
$$F(e) = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}\ln e + \frac{1}{2}(\ln e)^2$$

$$F(e) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{4}$$

$$F(1) = \frac{1}{4} \quad (0,25)$$

3. fonction réciproque de f.

- f^{-1} et f ont le même sens de variation
- symétrique par rapport à la première bissectrice



(0,25)

