BACCALAUREAT BLANC N°2
SESSION AVRIL 2013

COEFFICIENT : 4
DUREE : 4H

MATHEMATIQUES

SERIE F2

Cette épreuve comporte 2 pages. L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé. Le candidat devra se munir de 2 papiers millimétrés

EXERCICE 1

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \pi$, On considère le nombre complexe $z = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta$

1. Déterminer le module et un argument de z en fonction de θ

2. Déterminer θ pour que z et $1-z$ aient le même module

RAPPELLE : $-\sin\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$; $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

EXERCICE 2

PARTIE A

On considère dans C l'équation suivante : $(E): z^3 - (3+3i)z^2 + 3iz + (4+6i) = 0$

1. Résoudre dans C l'équation $(E'): z^2 - z - 2 = 0$

2. a. Développer, réduire et Ordonner $\left[z-(2+3i)\right]\left[z^2 - z - 2\right]$

b. En déduire, les solutions de (E)

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm sur les axes. A, B et C les points d'affixes respectives $a=-1$, $b=2+3i$ et $c=2$

1. a. Placer les points A, B et C

b. Quelle est la nature du triangle ABC

2. Soit f l'application de dans P qui a tout point M d'affixe z associe M' tel que $z' = 2iz + 1 - 2i$

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

Soient A', B' et C d'affixes respectives a', b' et c', les images par f des points A, B et C.

b. Déterminer a', b' et c'.Placer A', B' et C

c. Quelle est la nature du triangle A'B'C' dans le plan P. Justifier votre réponse.

d. calculer $W = \frac{c'-b'}{c-b}$ et écrire sous forme trigonométrique et exponentielle

e. En déduire la valeur de et une mesure de l'angle $(BC, B'C')$

f. Que peut-on dire des droites (BC) et (B'C') ?

PROBLEME

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$.On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité graphique : 2 cm)

PARTIE A

On introduit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+3-2\ln x$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B : Etude de la fonction f

1. Calculer f(1), et montrer que $f(e)=\frac{e^2+1}{2e}$.
2. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
3. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
4. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$.

   En déduire le sens de variation de f.
5. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α appartenant à $]3;4[$.

   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
6. Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$.

   Déterminer alors $\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$. Interpréter graphiquement ce résultat.
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 1.
8. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On donne $\ln e=1$

PARTIE C :

Soir F la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

1. Déterminer la fonction dérivée F' de F sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calculer le nombre $A=4\times[F(e)-F(1)]$. Donner la valeur exacte .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction réciproque de f sur $]0;+\infty[$
4. En déduire la courbe représentative de la fonction réciproque de f dans le repère précédant.