SERIE F2

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotés 1/2 et 2/2.

*Chaque candidat devra se munir de deux papiers millimétrés. Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées*

EXERCICE 1

- Soit les points A, B et C d'affixe respectives $z_1 = 2i$, $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = z_1 \times z_2$
 - Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessus
 - Donner la forme trigonométrique de z_1 et z_2
- Uniquement à partir des formes trigonométriques de z_1 et z_2 de déterminer celle de z_3
- Donner l'expression algébrique de z_3
 - Déterminer les expressions exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
- Placer dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C. Unité graphique 4 cm

EXERCICE 2

le but de l'exercice est le calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$, Pour cela, on introduit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par : $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}$ et $g(x) = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$, ainsi que les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$$

- Montrer que $f(x) + g(x) = \cos x$. En déduire que $I + J = 1$.
- Calculer la dérivée de la fonction u définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $u(x) = 1+2\sin x$.
 - En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis calculer J.
- En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur exacte de I.
- On rappelle que pour tout réel x $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx$.

PROBLEME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Sur la figure ci-dessous, la courbe C représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-1; +\infty[$
On a construit les points A(0 ;3), B(-1 ;1) et E (1 ;3+ln2). La droite (AB) est tangente en A à la courbe et la droite est tangente en E à la courbe $]-1; +\infty[$

1. A partir des informations ci-dessous, donner :
 - a. Une équation de la droite (AB)
 - b. Les valeurs des nombres réels $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$
 - c. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$
 - d. Le tableau de variation f

2. On admet que la fonction f est définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$ ou a et b sont des nombres réels. Calculer les nombres a et b à partir de $f(0)$ et $f(1)$.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x^2 + 4x + 3}{x+1} + \ln(x+1)$

1. Déterminer la limite de f en -1 . Donner une interprétation du résultat.
2. a. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)^2}$
 - b. Etudier le signe de $f'(x)$
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - d. Le résultat est-il cohérent avec le tableau donnée dans la partie A à la question 1.d
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. Estimer la valeur de α .
4. Justifier que f peut se mettre sous la forme $f(x) = 5 - x - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1)$
5. On admet que la fonction f est définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$
 Calculer $g'(x)$ et déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]-1; +\infty[$
6. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$. Donnez en une interprétation graphique.