

SESSION NORMALE 2002

Exercice 1

On considère dans R^2 le système d'équations suivant $(S) \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

1-a) Résoudre dans R^2 le système (S)

b) Dédire de 1 a) la résolution du système suivant : $(S_1) \begin{cases} e^x = e^{(5-y)} \\ e^{3x} = e^{(y-1)} \end{cases}$

2) On pose $A =]-\infty; 3[$; $B =]-1; +\infty[$ et on considère le système suivant

$$(S_2): (x, y) \in A \times B, \begin{cases} \ln[(3-x)(y+1)] = 5 \\ \ln\left[\frac{(3-x)^3}{y+1}\right] = -1 \end{cases}$$

a) En utilisant les propriétés algébrique de la fonction logarithme, écrire le système (S_2) sous la même forme que le système (S)

b) Dédire de la question 1 - a) la résolution du système (S_2) .

Exercice 2

On veut former un comité dont les membres doivent être choisis dans un groupe de 20 personnes.

Déterminer le nombre de possibilités de formations du comité dans chacun des cas suivants :

1^{er} cas : il n'y a pas poste à pourvoir et il ya 3 personnes exactement dans le comité.

2^{ème} cas : il y a 3 postes à pourvoir avec la possibilité de cumul de postes

3^{ème} cas : Il y a 3 postes à pourvoir sans possibilité de cumul de postes.

Exercice 3

Le nombre de passagers transportés annuellement sur une ligne de transport aérien de 1996 à 2000 a conduit à l'établissement du tableau suivant

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Nombre de Passager (p_i)	7550	9235	10741	12837	75655

1- On pose $y_i = \ln(p_i)$ Calculer les valeurs de y correspondant aux observations

(on prendra les arrondis d'ordre 3)

En déduire la série statistique double de caractère (X, Y) où X désigne le rang de l'année.

2. Calculer :

a) Les moyennes \bar{X} et \bar{Y}

b) Les variances $V(X)$, $V(Y)$ et la covariance $COV(X, Y)$

En déduire le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y . La valeur trouvée justifie t-elle un ajustement affine ?

3. a) Déterminer par la méthode des moindres carrés. Une équation de la droite de régression (D) de Y en X .

b) En supposant la même évolution du nombre de passagers, donner une estimation pour l'année 2002.

Exercice 4

Partie A

1 Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

- 1) Calculer $g(1)$
- 2) Etudier les variations de g
- 3) Dédire du tableau de variation de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

- 1- a) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
b) déterminer la limite de f en $+\infty$
- 2- a) démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) ,
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 3- a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x démontrer que : pour tout nombre réel x strictement positif
b) En déduire le sens de variation de f et dresse son tableau de variation
- 5) Ecrire une équation de la tangente (T) de la courbe (C) au point d'abscisse e
- 6) Représenter graphiquement (C) , (D) et (T) dans un repère (O, I, J)