

SESSION NORMALE 2006

Exercice 1

On considère le polynôme défini par $P(x) = 6x^3 - 25x^2 + 25x - 6$

1- Calculer $P(3)$ et en déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de facteurs de polynômes de degré 1

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) l'équation $(2e^x - 1)\left(e^x - \frac{2}{3}\right)(e^x - 3) = 0$

b) l'inéquation $(2e^x - 1)\left(e^x - \frac{2}{3}\right)(e^x - 3) \leq 0$

Exercice 2

La société SLAMA a mis au point un logiciel de gestion destiné aux PME..

Elle réalise une enquête auprès de 500 entreprises

Le tableau suivant donne le prix de vente X en milliers de francs proposé et le nombre Y d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix.

Prix X proposé en milliers de francs	40	36	32	28	24	20	16	12	10	8
Nombres d'entreprise Y	60	70	130	210	240	340	390	420	440	500

1- a) Représenter dans un repère orthonormé, le nuage de points associé à cette série statistique elle échelle : Abscisse 1 cm pour 4 000 F

Ordonnée 1 cm pour 50 entreprises.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G .

2- a) Calculer le Coefficient de corrélation linéaire r entre X et Y (donner sa valeur à 10 près par défaut) un ajustement affine est-il justifié ?

b) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés

2- Les frais de conceptions du logiciel se sont élevés à 500 000 F, les frais variables sont supposés négligeables. En admettant que pour un nombre Y d'entreprises disposées à acheter le logiciel au prix x , le bénéfice réalisé est

$$B(x) = -14,15x^2 + 599,79x - 500$$

a) Déterminer le prix permettant d'obtenir le bénéfice maximum.

b) Estimer alors le nombre d'entreprises ayant acheté logiciel à ce prix.

Exercice 3

Pour préparer de façon efficace leur examen Baccalauréat, 50 élèves d'une classe de Terminale G2 décident de constituer des groupes d'étude de 4 membres

1- Justifier qu'ils peuvent réaliser 230 300 groupes d'étude différents.

2- parmi ces 50 élèves, il y a 20 filles.

Combien de groupes d'études différents comportant au moins 2 filles peut-on former ?

Exercice 4

A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

2- Calculer $g(1)$.

3- Déduire du tableau de variation de g , le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (unité graphique 2cm.)

1- a) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$

2-a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$ est asymptote à (C)

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

3-a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0; +\infty[$ et démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

b) en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que l'abscisse du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) est égale au

4- Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point B dont l'abscisse noté α appartient à l'intervalle $]0,51; 0,52[$. Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près

5- Construire (C) et (D) on fera figurer les points A et B sur la courbe.