PREPABAC TEST 8	EPREUVE DE MATHEMATIQUES : SERIE G2	ANNEE SCOLAIRE : 2011-2012
		DUREE : 3 HEURES

PROBLEME 1

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+2x-3$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-3$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
2. a. Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante : $f(x)=e^{-x}\left(1+2xe^{x}-3e^{x}\right)$
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$).
3. a. Déterminer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}}$ En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;\ 2]$. Donner une valeur approchée de α.
5. On considère le point A de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisse $-\ln 3$.
   a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
   b. On note (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A. Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) est -1. Déterminer l'équation de (T).
6. Construire avec soin la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (D).

PARTIE B

1. Vérifier que la fonction F définie sur R par $F(x)=-e^{-x}+x^{2}-3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit (E) le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$. Hachurer le domaine (E).Soit (A) l'aire du domaine (E) en unités d'aire, calculer la valeur exacte de (A).Donner une valeur approchée de (A) à 10^{-2} près.

PROBLEME 2

PARTIE A : ETUDE D'UNE FONCTION

On note f la fonction définie sur l'ensemble R des nombres réels par : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+e^{-2x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction *f*

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que $f(x)=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D.

2. Étude des variations de la fonction *f*

a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

b. Résoudre l'inéquation $e^{-2x}>\frac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

c. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.

d. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

3. Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, les droites D et T, puis tracer la courbe $\mathcal{C}$

PARTIE B : CALCUL D'UNE AIRE

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à ln2. On note $\mathcal{A}(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite D et les droites d'équations $x=\ln 2$ et $x=m$. Déterminer $\mathcal{A}(m)$ en fonction de m.

2. Calculer la limite de $\mathcal{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.