Institut Secondaire Technique
Adama Sanogo

NIVEAU : Tle G2
DUREE : 3H

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte 2 pages.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.
Le candidat devra se munir de 2 papiers millimétrés

EXERCICE 1

4,(pts) 0,75/questions

Un chef de famille possède dans un poulailler traditionnel non transparent 9 volailles dont 4 poulets, 3 pintades et 2 canards. Pour participer à la joie de fin d'année de ses trois enfants réussis au **BACCALAUREAT**, il décide d'offrir à chacun d'eux une volaille tirée au hasard, successivement sans remise du poulailler.

1. Justifier que ce chef de famille a 504 possibilités d'offrir une volaille à chacun de ses enfants.

modèle de base : tirage succ sans remise : $N = A_9^3 = 9\times8\times7 = 504$ Possibilités.

2. a. Combien y-a-t-il de cas ou les trois volailles offertes sont de la même espèce animale ?

le chef de famille offre soit : des pintades, soit des Poulets aux trois enfants : $N = A_4^3 + A_3^3 = 30$

b. Combien y-a-t-il de cas ou les trois volailles offertes sont d'espèce animale différente ?

le chef de famille offre 1 pintade, 1 poulet et 1 canard exactement (à la fois)
$N = A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 = 4\times3\times2 = 24$

3. Combien y-a-t-il de cas pour que chacun des trois enfants reçoive un poulet ?

Chaque enfant reçoit un poulet que si la chef ne partage que des Poulets $N = A_4^3 = 4\times3\times2 = 24$

4. a. Combien y-a-t-il de cas pour que parmi les trois volailles offertes il n'y aucun canard ?

le chef ne partage que des pintades et des poulets : $N = A_7^3 = 210$

b. Combien y-a-t-il de cas pour que parmi les trois volailles offertes il ait au moins un canard ?

le chef peut donc partager soit 1 ou 2 canards.

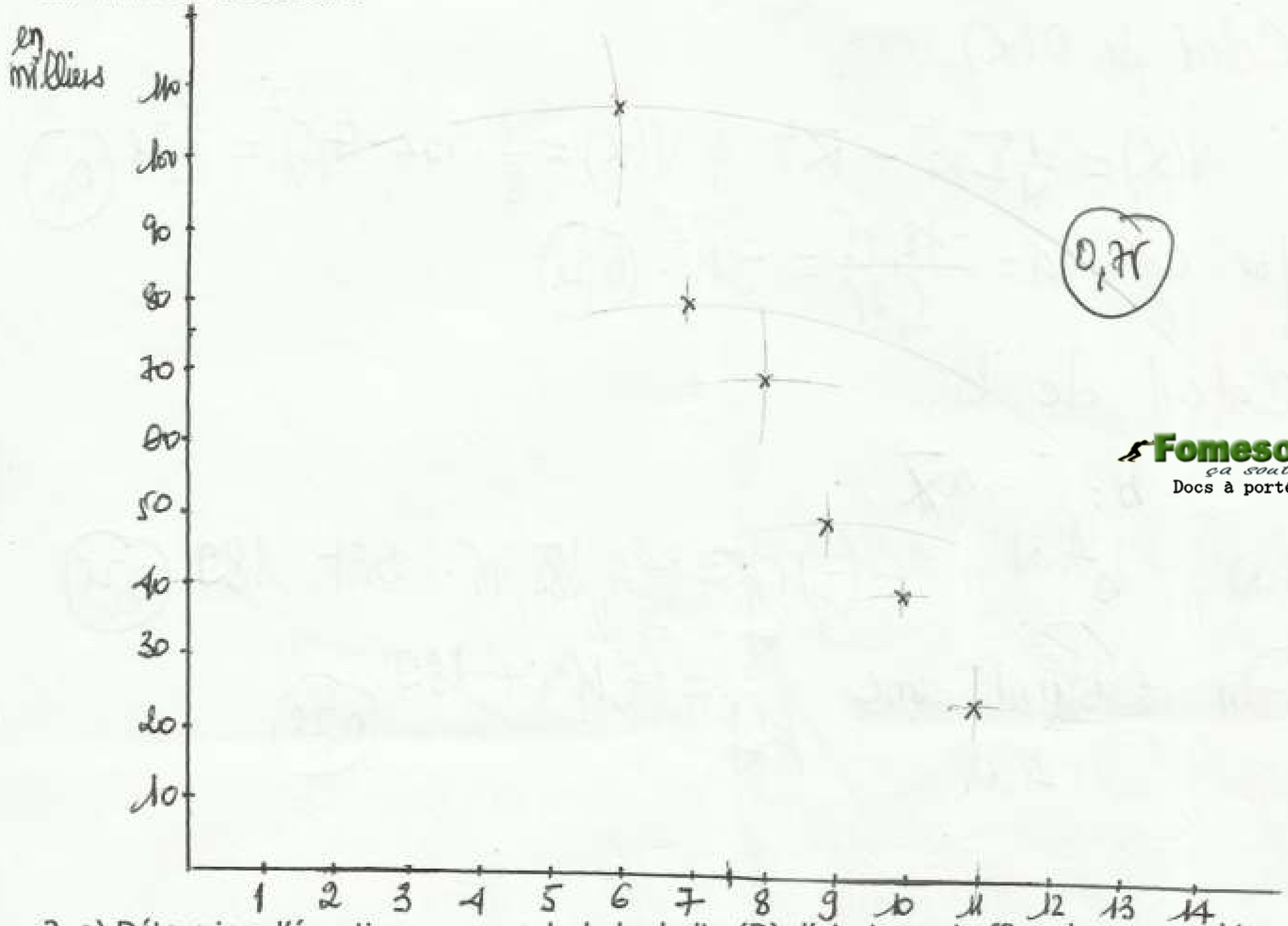
$A_2^1 \times A_7^2 + A_2^2 \times A_7^1 = 2\times42 + 2\times7 = 98$ cas.

EXERCICE 2

Pour établir le prix unitaire le plus adapté d'un produit, une société effectue une étude statistique. Le tableau suivant indique le nombre d'acheteurs, exprimé en milliers, correspondant à un prix unitaire donné, exprimé en francs cfa :

Prix en dizaines de francs cfa : x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombres d'acheteurs en milliers : y_i	125	120	100	80	70	50	40	25

1. Représenter le nuage de points Mi (x_i;y_i) dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal d'unités 1 cm pour une dizaines de francs cfa sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'acheteurs sur l'axe des ordonnées.



2. a) Déterminer l'équation y = ax + b de la droite (D) d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'unité.

Tableau des Calculs. 0,5

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i	Total.
	4	125	16	15625	500	
	5	120	25	14400	600	
	6	100	36	10000	600	
	7	80	49	6400	560	
	8	70	64	4900	560	
	9	50	81	2500	450	
	10	40	100	1600	400	
	11	25.	121	625	275.	
T	60	610	492	56050	3945	

On a: $y = ax+b$

avec $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$

or $Cov(X,Y) = \frac{1}{N}\sum x_iy_i - \bar{X}\bar{Y}$

On a: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{1}{8} \times 60$

$\bar{x} = 7,5.$ 0,5

$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum y_i = \frac{1}{8}\ 610$

$\bar{Y} = 76,25.$ 0,5

Calcul de $Cov(x,y)$; $Cov(x,y) = \frac{1}{8} 3945 - (7{,}5 \cdot 76{,}25)$

$$Cov(x,y) = -78{,}75$$ (0,5)

Calcul de $V(x)$.

$V(x) = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$; $V(x) = \frac{1}{8} \cdot 492 - (7{,}5)^2 = 5{,}25$ (0,5)

Par cqr $a = \frac{-78{,}75}{5{,}25} = -15$. (0,25)

Calcul de b.

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

AN $b = 76{,}25 - (-15) \cdot 7{,}5 = 188{,}75$ soit 189. (0,25)

On obtient donc : $y = -15x + 189$. (0,25)

b) Tracer la droite (D) dans le plan (P).

c) En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer graphiquement, au francs cfa près, le prix unitaire maximum que la société peut fixer si elle veut conserver des acheteurs.

Recherche des coordonnées du point G(7,5 ; 76,25). (0,5)

3. a) En utilisant l'ajustement affine précédent, justifier que la recette R(x), exprimée en milliers de francs cfa, en fonction du prix unitaire x d'un objet, exprimé en francs cfa, vérifie :
$R(x) = -15x^2 + 189x$.

Recette = Prix U. x nbre d'acheteurs : (0,5)

$R(x) = x.y \Leftrightarrow R(x) = x.(-15x+189) = -15x^2+189$.

(0,5) b) Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par :
$f(x) = -15x^2 + 189x$.

$f'(x) = -30x+189 \Leftrightarrow -30x = -189$
$x = 6,3$.

T.V

x	4		6,3		11
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

(0,5)

(0,5) 4. Quel conseil peut-on donner à la société ? Argumenter la réponse.

- Pour ne pas pdre à perte il faut fixer le prix U entre 4 et 6,3 au plus et éviter l'intervalle]6,3 ; 11[.

PROBLEME

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0 ;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

(ln x désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer g'(x) et étudier son signe.

$\forall x \in D_g,\ g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} = \frac{3x^3+2}{x}$

$\forall x \in D_g$, $x>0$ et $3x^3+2>0$ donc $g'(x)$ est positive $(g'(x)>0)$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées).
Calculer g(1).

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		+		
$g(x)$	‖	↗	0	↗	

$g(1) = 1^3 - 1 + 2\ln 1 = 0$

3. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d'après le Tableau de Variation, $\forall x \in]0;1[$, 0 est le maximum pour $]0;1[$ dc $g(x)<0$. $\forall x \in]1;+\infty[$, 0 est le minimum pour $]1;+\infty[$ dc $g(x)>0$ pour $]1;+\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$. On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unités :3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim_{x\to0} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\end{cases}$

$\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$ $\begin{cases}\lim_{x\to0}(x-1)=-1 \\ \lim_{x\to0}\frac{-\ln x}{x^2}=+\infty\end{cases}$

5. Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à (C).

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ Alors $y=x-1$ est Asymptote O. à Cf.

Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.

Comme $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$, Alors la courbe Cf, admet une asymptote Verticale à Cf d'eqt° $x=0$ (OJ).

6. Calculer f '(x) et montrer que l'on peut écrire $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

$f'(x)=\left(x-1+\frac{\ln x}{x^2}\right)'=1+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-2x\ln x}{x^4}$

$f'(x)=\frac{x^4+1-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(x^3+1-2\ln x)}{x^3\cdot x}$

On a: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

7. En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de f '(x), puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ st du même signe car $x^3>0$

Par cpt $\forall x \in]0;1[$, 0 est le maximum de $f(x) < 0$

et $\forall x \in]1;+\infty[$, 0 est le minimum de $f(x)>0$

si $x=1$, $f'(x)=0$.

8. Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C).
Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

(D): $y=x-1$ et $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$; $f(x)=y \Leftrightarrow x-1-\frac{\ln x}{x^2}=x-1$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

le point d'intersectⁿ a pour coordonnées $A(1;0)$.

9. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C) et les droites (D).

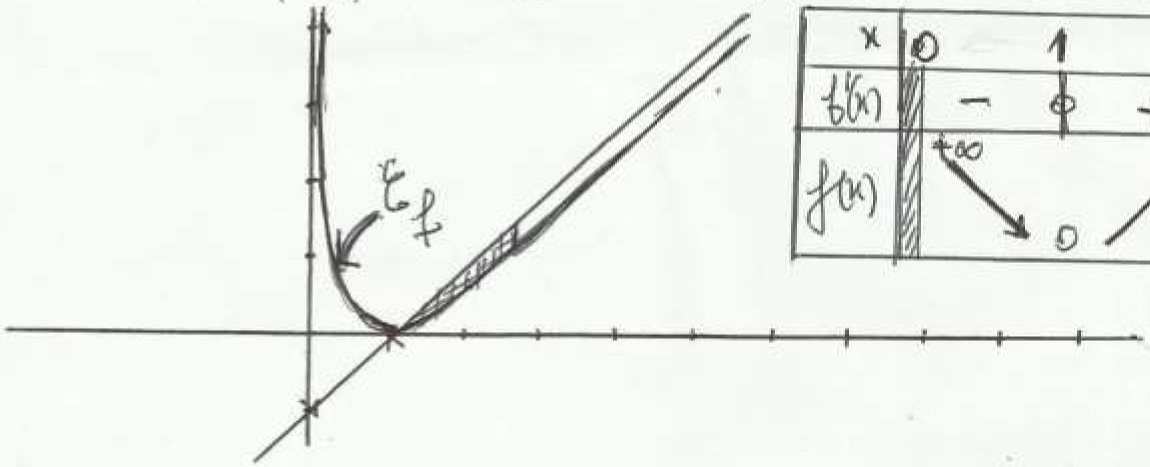


Tableau de Variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

10. Calculer l'aire de la partie du plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=e. On rappelle que **lne=1**

$\mathcal{A}=\int_1^e\left(x-1-\frac{\ln x}{x^2}\right)dx=\int_1^e(x-1)dx-\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}$

$u=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'=\frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x)=\cancel{\ln x}\ -\frac{1}{x}$

$\cancel{\mathcal{A}=\left[\ln^2 x\right]_1^e}-\int$

$\mathcal{A}=\left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e+\frac{1}{x^3}dx=\left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e-\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^e=\left[\frac{-\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right]_1^e\times OA.$

Posit° relative

$-\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

$-\infty$		1		$+\infty$
	$+$		$-$	
	$\mathscr{C}_f>D$		$\mathscr{C}_f<D$	