

**Exercice 1 : 5 points**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- 1) Donner la définition de dérivabilité en  $x_0$  pour la fonction  $f$ .
- 2) On suppose que  $f$  est 3 fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 près de  $x_0$



**Exercice 2 : 3 points**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0)=0$  et  $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  si  $x \neq 0$ .

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

**Exercice 3 : 5 points**

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice telle que  $A^k = 0$  pour un entier  $k$ . Montrer que

$$I_n = I_n - A + A - A^2 + A^2 - \dots + A^{k-1} - A^k + A^k = I_n - A^k$$

2. Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est telle que  $A^3 = 0$ . Calculer l'inverse

de la matrice  $B = I_3 - A$ .

**Exercice 4 : 7 points**

Soit  $A$  et  $B$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

- 1 -  $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$ .
- 2 -  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .
- 3 -  $A \Delta B = B \Delta A$ .
- 4 -  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .
- 5 -  $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$ .
- 6 -  $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$