

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Croire ou savoir. Deux notions complémentaires ou opposées ? Vous illustrerez vos propos.

Sujet n° 2

Pour convaincre, discuter, émouvoir, décevoir aussi, la parole est-elle une force accessible à chacune et à chacun ? Vous répondrez à la question.

Sujet n° 3

Le travail est-il un facteur d'inclusion sociale ? Répondez en argumentant.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Pour tout nombre réel α , on désigne par E_α le sous-espace vectoriel des fonctions f de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , continues et vérifiant

$$t \mapsto f(t)e^{-\alpha t} \text{ est bornée sur } [0, +\infty[.$$

On note par F_α l'espace défini par

$$F_\alpha = \bigcap_{\beta > \alpha} E_\beta.$$

On note de plus par C_α^∞ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $] \alpha, +\infty[$. Pour une telle fonction f , on notera $f^{(p)}$, pour $p \in \mathbb{N}$, sa dérivée p -ième avec la convention $f^{(0)} = f$.

On définit la transformée de Laplace comme étant l'application L qui à tout élément $f \in F_\alpha$ fait correspondre la fonction $L[f]$ définie sur $] \alpha, +\infty[$ par

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Partie 1

1. Montrer que $\alpha < \delta \Rightarrow E_\alpha \subset E_\delta$.
2. En déduire que $E_\alpha \subset F_\alpha$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in E_\alpha$ et $s > \alpha$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ est absolument convergente.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier que l'application L est bien définie sur F_α , c'est à dire que pour tout $f \in F_\alpha$, $L[f](s)$ est fini pour tout $s > \alpha$.
5. Vérifier que pour $f \in F_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est dans F_α .

Partie 2

L'objectif de cette partie est d'obtenir l'expression de la dérivée de la transformée de Laplace, ainsi que de la transformée de Laplace d'une dérivée, et de même pour les dérivées successives.

6. Soit $s > \alpha$ et $(s_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque dans $] \alpha, +\infty[$ qui converge vers s . Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on introduit la suite de fonctions $(\Delta_{p,n}(s, t))_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $] \alpha, +\infty[\times] 0, +\infty[$ par

$$\Delta_{p,n}(s, t) = \frac{(-t)^p e^{-st} f(t) - (-t)^p e^{-s_n t} f(t)}{s - s_n}.$$

Montrer que pour tout $s > \alpha$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \Delta_{p,n}(s, t) dt = \int_0^{+\infty} (-t)^{p+1} e^{-st} f(t) dt.$$

7. En déduire que L est une application de F_α dans C_α^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(L[f])^{(p)} = (-1)^p L[t^p f(t)],$$

où l'on note abusivement $t^p f(t)$ la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ définie sur $] 0, +\infty[$.

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ_k la fonction définie sur $] 0, +\infty[$ par $\varphi_k(t) = t^k e^{at}$.
 - a) Préciser le plus petit α pour lequel $\varphi_0 \in F_\alpha$ et déterminer $L[\varphi_0]$.
 - b) En déduire, pour tout $k \geq 0$, le plus petit α pour lequel $\varphi_k \in F_\alpha$ et déterminer $L[\varphi_k]$.
9. Soit f une fonction continument dérivable sur $] 0, +\infty[$ telle que $f \in F_\alpha$ et $f' \in F_\alpha$. Montrer que pour tout $s > \alpha$

$$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0).$$

10. Soit f une fonction p fois continument dérivable sur $] 0, +\infty[$ telle que $f^{(k)} \in F_\alpha$ pour tout $k = 1, 2, \dots, p$. Donner l'expression de $L[f^{(p)}]$ en généralisant l'égalité précédente.

Partie 3

On s'intéresse dans cette partie à l'application de la transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles.

On considère dans un premier temps l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = e^t \quad \text{avec} \quad y''(0) = y'(0) = y(0) = 1. \quad (1)$$

On admet que la solution y de (1) sur \mathbb{R} est unique. On cherche à déterminer cette solution.

11. On cherche la solution y de (1) parmi les fonctions appartenant à F_1 et dont les dérivées successives appartiennent également à F_1 .

- a) Justifier que sous cette hypothèse on peut appliquer L à chaque terme de l'équation (1) et préciser à quel ensemble l'image obtenue appartiendra.
- b) Déterminer l'expression de $L[y]$.

12. Donner toutes les solutions à (1) trois fois continument dérivables sur \mathbb{R} .

On considère à présent l'équation différentielle, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) + ny(t) = 0. \quad (2)$$

13. On s'intéresse aux solutions y de l'équation différentielle (2) appartenant à F_1 et dont les dérivées successives appartiennent également à F_1 .

- a) Justifier que l'on peut appliquer L à chaque terme de l'équation (2) et préciser à quel ensemble l'image obtenue appartiendra.
- b) Montrer que $L[y]$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
- c) Trouver des solutions sur $]1, +\infty[$ de l'équation précédente et en déduire qu'il existe un polynôme P non-nul, que l'on déterminera, tel que l'ensemble des fonctions $\{t \mapsto \lambda P(t), \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont solutions de l'équation différentielle (2) sur \mathbb{R} .

14. Pourquoi l'ensemble des solutions précédentes ne contient pas toutes les solutions de (2) sur $]0, +\infty[$?

15. On cherche finalement à trouver toutes les solutions de (2).

- a) On suppose que y et z sont deux solutions non-colinéaires de (2) sur $]0, +\infty[$. On définit le Wronskien par $W(t) = y(t)z'(t) - z(t)y'(t)$. On suppose que $W(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$. Montrer que pour $t > 0$, $W'(t)/W(t) = (t-1)/t$ et en déduire la forme de $W(t)$.
- b) On note $A(t)$ une primitive de $t \mapsto e^t/(tP^2(t))$ où P est le polynôme déterminé dans la question 13 c). Donner l'ensemble des solutions de (2) sur un intervalle de $]0, +\infty[$ ne contenant pas les racines de P .

2 Problème d'algèbre

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On note 0 le vecteur nul de E et id_E l'endomorphisme identité de E . On note de plus $f^0 = id_E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois).

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On note $f|_F$ la restriction de f à F . Pour rappel, on dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$K_n = Ker(f^n), \quad I_n = Im(f^n).$$

Partie 1

1. Montrer que :

- a) la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;
- b) la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- a) K_n est stable par f ;
- b) I_n est stable par f .

On pose :

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \quad I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

3. Vérifier que K et I sont des sous-espaces vectoriels de E .

4. Montrer que K et I sont stables par f .

5. Etablir les équivalences

- a) f injectif $\Leftrightarrow K = \{0\}$;
- b) f surjectif $\Leftrightarrow I = E$.

6. Pour les exemples suivants, déterminer I , K et montrer que

- $E = I \oplus K$;
 - $f|_K$ est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $f|_K^q = 0$;
 - $f|_I$ est un automorphisme de I dans I .
- a) f est une projection, c'est à dire $f^2 = f$.
 - b) Pour $d \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_d[X]$ est le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d , et f est l'opérateur dérivation sur E .

7. Montrer que la propriété $E = I \oplus K$ est fautive si f est l'opérateur dérivation sur $E = \mathbb{R}[X]$, où $\mathbb{R}[X] = \cup_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_d[X]$.

Partie 2

Nous supposons dans la suite du problème que E est de dimension finie. Nous allons montrer que les propriétés énoncées dans la question 6 sont toujours vraies dans ce cadre.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(K_n = K_{n+1}) \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{N}, K_n = K_{n+p})$.
9. Soit $m = \inf\{n \in \mathbb{N}, K_n = K_{n+1}\}$. Montrer que m est fini et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_{m+p} = K$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $(K_n = K_{n+p}) \Leftrightarrow (I_n = I_{n+p})$.
11. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{m+p} = I$.
12. Montrer que $f|_K$ est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $f|_K^q = 0$.
13. Montrer que $f|_I$ est un automorphisme de I dans I .
14. Vérifier que pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $f^m(x) = f^{2m}(y)$.
15. En déduire que $E = I \oplus K$.
16. Montrer la réciproque du résultat précédent, c'est à dire : si $E = F \oplus G$ avec F et G stables par f et tels que $f|_F$ est un automorphisme et $f|_G$ est nilpotente, alors nécessairement $F = I$ et $G = K$.

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et \ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Donner un développement limité d'ordre 4 de f en 0.
2. Etudier les variations de f , ainsi que sa convexité et tracer son graphe.
3. La fonction f admet-elle un centre de symétrie ? un axe de symétrie ?
4. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n° 2

On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.
2. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n° 3

Soit la fonction réelle f définie sur les réels positifs par : $f(x) = \begin{cases} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, où $E(x)$

désigne la partie entière du nombre réel x .

1. Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}^+ .

2. Etudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R}^+ .

3. Calculer $I = \int_{\frac{1}{3}}^1 f(x) dx$.

Exercice n° 4

On note E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Autres notations :

$O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de E ,

$D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de E , diagonalisables dans \mathbb{R} , et

$S_n(\mathbb{R}) = \{M = (a_{ij}) \in E / a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1\}$ (Les matrices de cet ensemble s'appellent stochastiques).

1. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe dans E ?

2. L'ensemble $D_n(\mathbb{R})$ est-il convexe dans E ?

3. L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ est-il convexe dans E ?

4. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de cette matrice M .

5. Montrer que toutes les matrices de l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ admettent une même valeur propre quel que soit $n > 1$.

Exercice n° 5

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = 0$ (le plus petit p s'appelle l'indice nilpotent).

1. Si A est une matrice nilpotente, montrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.

2. Soit A est une matrice nilpotente, montrer que toutes ses valeurs propres sont nulles et déterminer son polynôme caractéristique.

3. Soit A est une matrice nilpotente, montrer que : $\forall k = 1, 2, \dots, n, \text{Tr}(A^k) = 0$, où Tr désigne la trace. On rappelle que la trace d'une matrice est la somme des éléments de sa diagonale.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, calculer $A^n, \forall n \geq 1$.

5. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$, où A est inversible et B nilpotente. Comparer $\det(A + B)$ et $\det(A)$.

Exercice n° 6

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Soit φ l'application définie sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A'B)$ où Tr désigne la trace et A' la transposée de la matrice A .

1. Vérifier que φ est une forme bilinéaire.

2. φ est-elle symétrique ? Définie positive ?

3. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $N = B + \frac{1}{2} I$ (où I est la matrice unité d'ordre 4). Etudier la diagonalisation de N (on précisera ses valeurs propres).

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après de SOUGUEKO CHEK a été publié dans *The conversation aujourd'hui*.

Il doit être résumé en 150 mots (résumé au 1/6^{ème} avec plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Changement climatique : Repenser l'agriculture africaine pour améliorer la sécurité alimentaire

Le changement climatique risque d'entraver le développement agricole africain dans certaines zones vulnérables. Une majorité de la population d'Afrique subsaharienne vit en effet dans des régions rurales, où les revenus et l'emploi dépendent presque entièrement de l'agriculture pluviale.

Le développement agricole et les systèmes alimentaires des pays d'Afrique subsaharienne seront inexorablement confrontés à des défis considérables dans les décennies à venir. Alors que la population mondiale devrait passer de 7,7 à 9,7 milliards en 2050, plus de la moitié de la croissance démographique planétaire d'ici à 2050 devrait se produire en Afrique, selon l'Organisation des Nations Unies.

Face à cette pression, le développement agricole fait déjà face à d'immenses défis, et l'on craint que les changements climatiques ne les aggravent dans les zones vulnérables. Une majorité de la population d'Afrique subsaharienne vit en effet dans des régions rurales, où les revenus et l'emploi dépendent presque entièrement de l'agriculture pluviale.

Le secteur agricole emploie entre 65 et 70 % de la main-d'œuvre africaine et représente généralement 30 à 40 % du produit intérieur brut. De multiples facteurs biophysiques, politiques et socio-économiques se conjuguent pour accroître la vulnérabilité de cette région et risquent d'entraver sa capacité d'adaptation.

Précipitations, sécheresses et désertification

Le climat africain est déterminé par trois phénomènes climatiques critiques qui sont liés entre eux de manière complexe et qui ne sont pas encore entièrement compris. Il s'agit du mouvement de la zone de convergence intertropicale, de l'oscillation australe El Niño et de l'alternance annuelle des moussons. Chacun de ces phénomènes interagit avec l'autre, déterminant les régimes régionaux de température et de précipitations.

À cela s'ajoutent les changements climatiques en cours, qui ont des répercussions sur les précipitations et l'élévation du niveau de la mer, et entraînent une augmentation modérée à extrême de la température mondiale.

Au-delà des hausses de température, les changements climatiques en Afrique subsaharienne devraient entraîner des transformations dans l'intensité des précipitations, une incidence accrue des événements extrêmes tels que les sécheresses et les inondations, le renforcement de la désertification et l'altération de certains vecteurs de maladies entraînant des transformations dans la transmission spatiale et temporelle des maladies infectieuses.

Un quart de la population sous-nourrie

L'un des plus grands défis auxquels nos sociétés sont actuellement confrontées est de fournir en permanence à tous les citoyens des aliments nutritifs tout en préservant l'environnement. Ce problème se pose avec une acuité particulière en Afrique subsaharienne, où l'on estime qu'une personne sur quatre ne dispose toujours pas d'une alimentation suffisante pour mener une vie saine et active.

Le terme « sécurité alimentaire » est défini comme l'accès physique, social et économique de tous et à tout moment à une nourriture à même de satisfaire leurs besoins énergétiques et leurs préférences alimentaires pour mener une vie saine et active.

Elle repose sur quatre piliers : la disponibilité alimentaire, l'accès à la nourriture, l'utilisation de la nourriture et la stabilité de la disponibilité alimentaire et de l'accès aux aliments. L'insécurité alimentaire quant à elle correspond à un manque d'accès à une nourriture suffisante.

En dépit d'une incertitude sur les données climatiques, la littérature publiée permet de tirer plusieurs points saillants : partout en Afrique, l'agriculture risque d'être affectée négativement par les changements climatiques ; et dans la plupart des pays d'Afrique subsaharienne, le rendement des cultures pourrait diminuer de 10 à 20 % d'ici à 2050 en raison du réchauffement.

Dans le cas du blé, ce rendement moyen pourrait baisser d'ici au milieu du siècle de 17 %, celui du maïs de 5 %, celui du sorgho de 15 % et celui du millet de 10 %.

Même sans les changements climatiques, les agricultures africaines suscitent déjà de graves inquiétudes en raison de la variabilité de l’approvisionnement en eau, de la dégradation des sols et des sécheresses récurrentes. Il ne fait aucun doute que l’agriculture devra changer radicalement pour répondre aux demandes futures.

D’autant plus si l’on tient compte des taux de croissance démographique – les plus élevés au monde – et des modifications des habitudes alimentaires liées à l’urbanisation et à l’essor de la classe moyenne africaine.

Régimes moins carnés et agroécologie

Le défi consiste non seulement à augmenter la production alimentaire, mais aussi à le faire de manière durable, en réduisant nos émissions de gaz à effet de serre et en préservant la biodiversité.

En effet, la quantité de nourriture disponible pour la consommation humaine est affectée par l’attribution des cultures à d’autres utilisations non alimentaires, telles que l’alimentation animale, la bioénergie et les utilisations industrielles. Au niveau mondial, seulement 67 % de la récolte produite (en masse) ou 55 % des calories produites sont disponibles pour la consommation humaine directe.

Le reste de la récolte a été alloué à l’alimentation animale (24 % en masse) et à d’autres utilisations industrielles, y compris la bioénergie (9 % en masse). Dans les pays riches, de nombreuses personnes consomment davantage de produits d’origine animale que ce qui est recommandé sur le plan nutritionnel : c’est le cas du modèle alimentaire très carné nord-américain ou argentin.

Or nous avons besoin de toute urgence de nouvelles alternatives pour relever les défis actuels et futurs auxquels sont confrontés nos systèmes alimentaires. Des réformes seront donc nécessaires, notamment l’évolution vers des régimes moins carnés, ce qui pourrait augmenter la productivité alimentaire des terres cultivées et nourrir plus de personnes par hectare de terre cultivée.

Dans ce contexte, l’agroécologie – qui vise à concevoir des systèmes alimentaires impliquant moins de pressions sur l’environnement et un usage plus modéré des ressources naturelles – sera indispensable pour améliorer la sécurité alimentaire et la nutrition ; en rétablissant et en maintenant les écosystèmes, en offrant des moyens de subsistance durables aux petits exploitants et en renforçant la résilience pour s’adapter aux changements climatiques.

Cette analyse a été rédigée par Sougueh Cheik, docteur en sciences de l’environnement à l’Institut de recherche pour le développement (IRD).