

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice:

1) On remarque que 2 n'est pas décomposable,

$$\text{que } 8 = -1 - 2 - 3 - 4 + 5 + 6 + 7$$

$$= 1 - 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7$$

$$= -1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7$$

et...

Donc:

a) tout nombre pair n'est pas décomposable

b) la décomposition n'est pas unique

2) On remarque que 6 n'est pas décomposable.

Notons par conséquent que les multiples de 4 sont décomposables

$4p$

a) vrai pour $p = 1$

$$b) 4p = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k$$

$$4p+4 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k + 4 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k - 1 + 2 + 3$$

$$= \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k + 4p - (4p+1) + (4p+2) + (4p+3)$$

$$= \sum_{k=1}^{4p+3} \varepsilon_k k$$

Probleme 1

$$1) \quad 2r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = \lambda(1)^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_0 = a = \lambda + \mu$$

$$u_1 = b = \lambda - \frac{\mu}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+2b}{3} \quad \mu = \frac{2(a-b)}{3}$$

$$u_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{a+2b}{3}$$

$$3) \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

$$u_{n+2} = v_{n+1} + u_{n+1}$$

$$2(v_{n+1} + u_{n+1}) = u_{n+1} + u_n$$

$$\Rightarrow 2v_{n+1} = -(u_{n+1} - u_n)$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n \\ v_0 = b - a \end{cases}$$

$$v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

⋮

$$v_0 = u_1 - u_0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_0 = u_n - u_0$$

$$u_n = a + v_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$u_n = a + (b-a) \frac{1 - (-1/2)^n}{3/2}$$

$$= \frac{a+2b}{3} + \frac{2(b-a)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On retrouve la forme générale de la question 1.

$$4) \quad u_{n+2} + \frac{u_{n+1}}{2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}$$
~~$$\frac{1}{2} \left(u_{n+1} + \frac{u_n}{2} \right) = \frac{u_n}{2}$$~~

$$\Rightarrow w_{n+1} = w_n$$

La suite (w_n) est constante, égale à $w_0 = u_1 + \frac{u_0}{2} = b + \frac{a}{2}$

$$u_{n+1} + \frac{u_n}{2} = b + \frac{a}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n + b + \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{a}{2} + b \end{cases}$$

$$5) \quad x_n > 0 \quad \forall n$$

On passe au logarithme: $u_n = \ln x_n$

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_n)$$

$$u_0 = \ln 1 = 0$$

$$u_1 = \ln 2$$

$$x_n = \exp \left\{ \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{3} \ln 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$$= e^{\frac{2}{3} \ln 2 [1 - (-1/2)^n]}$$

$$u_n \rightarrow \frac{2}{3} \ln 2 \Rightarrow x_n \rightarrow e^{\frac{2}{3} \ln 2} = 2^{2/3}$$

Problème 2:

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

1) $I(0) = \pi/2$

$I(1) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$

$I(2) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

2) $I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \cos t \, dt$

$$= (\sin t \cos^{n-1} t)_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^{n-2} t \sin t \, dt$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \, dt$$

$$= (n-1) I(n-2) - (n-1) I(n)$$

$$n I(n) = (n-1) I(n-2)$$

3) Sur $[0, \pi/2]$, $\cos t \geq 0 \Rightarrow I(n) \geq 0$

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \cos t \, dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = I(n)$$

en majorant $\cos t$ par 1

4) On a: $I(n+1) \leq I(n+1) \leq I(n)$

$$\frac{I(n+1)}{I(n)} \leq \frac{I(n+1)}{I(n)} \leq 1$$

↓

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

D'où, en passant à la limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(n+1)}{I(n)} = 1$$