

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve se compose d'un exercice et de deux problèmes ; le candidat peut les traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE

P désigne l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit n un élément de P.

On cherche à écrire n sous la forme d'une combinaison linéaire des $n - 1$ entiers qui le précèdent, c'est-à-dire 1, 2, 3, ..., $n - 2$, $n - 1$, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que + 1 ou - 1. Par exemple, on a $4 = - 1 + 2 + 3$.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque $n \in P$ une décomposition :

$$(D) \quad n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k$$

où le symbole ε_k est le coefficient +1 ou - 1 à affecter à l'entier k .

- ❶ La décomposition d'un entier pair $n \in P$ est-elle unique ?
- ❷ Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (D).

PROBLEME N° 1

On rappelle qu'une suite réelle (u_n) est dite « récurrente d'ordre k » lorsque le terme général u_n dépend des k termes précédents $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}$; les k premières valeurs $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ de la suite sont données comme conditions initiales.

On considère une suite réelle (u_n) , où n est un nombre entier, $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est une suite récurrente d'ordre 2 définie par la relation :

$$u_{n+2} = (u_{n+1} + u_n) / 2$$

On donne les conditions initiales $u_0 = a$ et $u_1 = b$, où a et b sont deux nombres réels.

❶ En utilisant les résultats classiques sur les suites récurrentes d'ordre 2, donner l'expression, en fonction de n et des paramètres a et b , du terme général de la suite u_n .

❷ Déterminer la limite du terme général u_n de la suite (u_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

❸ On définit la suite (v_n) , $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on explicitera la raison.

Donner l'expression générale de v_n en fonction de n , a et b .

Retrouver l'expression du terme général de la suite (u_n) établie à la question 1.

❹ On définit la suite (w_n) , $n \in \mathbb{N}$, par :

$$w_n = u_{n+1} + u_n / 2$$

Etudier la suite (w_n) .

En déduire que la suite (u_n) peut être mise sous la forme d'une suite récurrente d'ordre 1, de la forme :

$$u_{n+1} = A u_n + B$$

où l'on déterminera les expressions des constantes A et B .

⑤ Pour tout entier n , on définit la suite réelle (x_n) , récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = (x_{n+1} x_n)^{1/2}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

Déterminer la limite de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

PROBLEME N° 2

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I(n)$ suivante :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

① Calculer $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$.

② En effectuant une intégration par parties, établir la relation suivante :

$$n I(n) = (n-1) I(n-2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

③ Montrer que la suite des intégrales $I(n)$ est une suite de termes positifs et qu'elle est décroissante.

④ En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} I(n+1)/I(n) = 1$.

⑤ On définit $Z(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $Z(0)$ et $Z(1)$.

⑥ Montrer par récurrence que, pour tout n , $Z(n)$ est égale à une constante C que l'on explicitera.

⑦ Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n I^2(n) = \pi/2$$

⑧ A l'aide de la relation établie à la question 2, établir les formules suivantes :

$$I(2p) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p} \pi/2$$

$$I(2p) = \pi C_{2p}^p / (2 \times 4^p)$$

$$I(2p+1) = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2p)}{3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)}$$

$$I(2p+1) = 4^p / [(2p+1) C_{2p}^p]$$