***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE***

***OPTION ECONOMIE***

**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

## EXERCICE n° 1

**1-** $M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+b \\ a+b & 0 & -(a+b)^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M(a)M(b) = M(a+b)$

**2-** $M(2a) = M^2(a)$

On montre sans difficulté (récurrence) :

$M^n(a) = M(na)$

**3-** Soit $b = -a$

$M(a)M(-a) = M(0) = I$

$\Rightarrow \quad M^{-1}(a) = M(-a)$

## EXERCICE n° 2

**1-** $U^2 = nU$

$U^3 = U^2U = nU^2 = n^2U$

<u>Récurrence :</u>

Hypothèse : $U^k = n^{k-1}U$

Vrai pour $k = 1$

Vrai pour $k$

$U^{k+1} = U^kU = n^{k-1}UU = n^{k-1}U^2 = n^kU$

**2**- Soit $A$ l'inverse de $U$ :

$$AU = I$$

$\Rightarrow$ $AU^2 = U = nAU = nI$

en multipliant par U et en utilisant le résultat de la question 1.

$\Rightarrow$ $U = nI$

ce qui est impossible (sauf si $n = 1$, cas particulier vraiment « très particulier »).

## PROBLEME

**1-** $I(n) = \int_1^n \ln t \; dt = [t \; \log \; t - t]_1^n$
$= n \ln n - (n-1)$

**2-** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$

On remarque que $S_n = \ln(n!)$

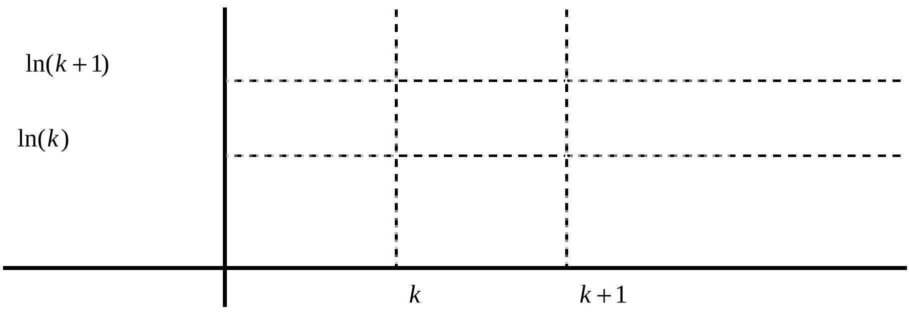
**2a-** La fonction $t \to \ln t$ est <u>croissante</u> sur $[k, k+1]$, donc $\forall \; t \in [k, k+1]$

$$\ln k \le \ln t \le \ln(k+1)$$

Et, par positivité de l'intégrale :

$$\ln(k) \le \int_k^{k+1} \ln(t) \; dt \le \ln(k+1) \qquad \forall \; k \ge 1$$

<u>Remarque</u> : l'intégralité précédente revient à comparer les aires des rectangles entourant la courbe (C)



**2b-** Par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \le \int_{1}^{n+1} \ln(t)\ dt \le \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

ou :

$$S_n \le I(n+1) \le S_n + \ln(n+1)$$

D'où l'encadrement :

$$I(n+1) - \ln(n+1) \le S_n \le I(n+1)$$

$$n\ \ln(n+1) - n \le S_n \le (n+1)\ \ln(n+1) - n$$

**3-** En passant à l'exponentielle :

$$e^{n\ln(n+1)-n} \le n! \le e^{(n+1)\ln(n+1)-n}$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n \le n! \le e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Comme $\left(\frac{n}{e}\right)^n < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n$, on en déduit l'encadrement (1) demandé.

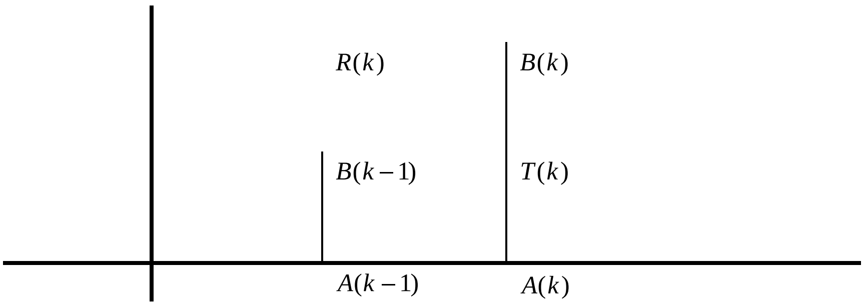
A- Numérique : $n = 10$, $10! = 3628800$

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \approx 453999$$

$$e\left(\frac{11}{e}\right)^{11} \approx 12953130$$

L'encadrement (1) n'apporte à l'évidence aucune approximation intéressante : trop large

**4-**




Par construction :

$$R(k) + T(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt$$

**4a-** $T(k) = \frac{1}{2}\left[\ln(k-1) + \ln(k)\right] \qquad (k \geq 2)$

**4b-** $R(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt - T(k)$

$$J = \int_{k-1}^{k} \frac{k - 0{,}5 - t}{t}\ dt$$

en posant $du = \frac{dt}{t}$ et $u = k - 0{,}5 - t$

$$J = \left[(k - 0{,}5 - t)\ \ln t\right]_{k-1}^{k} \qquad + \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\left[\ln(k) + \ln(k-1)\right]}_{T(k)} \qquad + \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt = R(k)$$

Posons $t = k - u$, $u = k - t$, $du = -dt$

$$R(k) = \int_{1}^{0} \frac{u - 1/2}{k - u}\ (-du) = \int_{0}^{1} \frac{u - 0{,}5}{k - u}\ du$$

Intégrons par parties :

$$R(k) = \underbrace{\left[\frac{1}{k-u}\left(\frac{1}{2}\ u^2 - \frac{1}{2}\ u\right)\right]_0^1}_{0} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(u^2 - u)\ du}{(k-u)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(u-1)\ du}{(k-u)^2}$$

**5-** $g(u) = u - u^2 \qquad 0 \leq u \leq 1$

$g'(u) = 1 - 2u$

| | 0 | | 1/2 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| g' | | + | 0 | - | |
| g | 0 | ↗ | 1/4 | ↘ | 0 |

On en déduit :

$$R(k) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1/4}{(k-u)^2} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{k-u}\right]_0^1$$

$$R(k) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

**6-** $U(n)=\sum_{k=2}^{n} R(k)$

**6a-** $$0 \le \sum_{k=2}^{n} R(k) \le \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

**6b-** On a :

$$0 \le U(n) \le \frac{1}{8}$$

La série $U(n)$ est croissante (trivial) et majorée, donc convergence :

soit $u=\lim_{n\to+\infty} U(n)=\sum_{k=2}^{\infty} R(k)$

**6c-** $u-U(n)=\sum_{k\ge n+1} R(k)$

D'où, pour $M$ fixé $\ge n+1$

$$\sum_{k=n+1}^{M} R(k) \le \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{k=n+1}^{M}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{M}\right)$$

$\Rightarrow$, en faisant $M\to+\infty$ :

$$u-U(n)\le\frac{1}{8n}$$

**7-** On sait que :

$$T(k)=\int_{k-1}^{k}\ln(t)\,dt-R(k)$$

$$\sum_{k=2}^{n} T(k)=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln(t)\,dt-\sum_{k=2}^{n} R(k)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{n}\ln(k)+\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)\right]}_{\downarrow}=\int_{1}^{n}\ln(t)\,dt-U(n)$$

$$=S_n-\frac{1}{2}\ln(n) \qquad (\text{car } \ln 1=0)$$

$$S_n - \frac{1}{2}\ln(n) = n\ \ln(n) - (n-1) + u - U(n) - u$$

$$S_n = n\ \ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + (1-u) + \underbrace{u - U(n)}_{\varepsilon(n)}$$

**8-** En passant à l'exponentielle :

$$e^{S_n} = n! = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\ n}\ e^{-n}\ e^{1-u}\ e^{u-U(n)}$$
$$= \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\ e^{1-u}\ e^{\varepsilon(n)}$$

D'après 6c, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0 \Rightarrow e^{\varepsilon(n)} \to 1$

$$n! \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

avec $C = e^{1-u}$

**9-** $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{C\sqrt{2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}}{C^2 n\left(\dfrac{\mathrm{n}}{e}\right)^{2n}}$

$$\frac{1}{C}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ \frac{2^{2n}}{n^{2n}} = \frac{4^n\sqrt{2}}{C\sqrt{n}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{2\pi}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Pour $n = 10$, $n! \sim 3598696$