ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Première partie

1 – $D(f, g) = \text{Sup}_{x \in U} (|f(x) – g(x)|) = 0 \Leftrightarrow |f(x) – g(x)| = 0$ pour tout $x \in U$
$\Leftrightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \in U \Leftrightarrow$ f identique à g

2 – On sait que $|f(x) – g(x)| = |g(x) – f(x)|\ \forall x \in U$, d'où $D(f, g) = D(g, f)$

3 – $\forall x \in U$, $f - g = f – h + h – g$
D'où $|f(x) – g(x)| \leq |f(x) – h(x)| + |h(x) – g(x)|$

Et donc le résultat.

D est une distance sur l'ensemble F.

4 – On note par d(x) la différence $f(x) – g(x)$.
On montre facilement que d atteint son maximum sur U au point $x = ½$, et que ce maximum $D(f, g)$ vaut ¼.
$D(f, g)$ est l'écart le plus grand mesuré parallèlement à l'axe des ordonnées entre les graphes des fonctions f et g.

5 – Comme pour la question précédente, soit par le calcul, soit par la représentation graphique, on établit $D(f, g) = 1$. L'écart maximum entre les graphes de f et g est atteint pour $x = ½$.

6 – $d(x) = \cos\pi x - \sin\pi x$; $d'(x) = - \pi (\sin\pi x + \cos\pi x)$.
Il est facile de montrer que d décroît de 1 pour $x = 0$ à $–\sqrt{2}$ pour $x = ¾$.
$D(f, g) = \sqrt{2}$.

7 – Prenons $f(x) = 2 \cos\pi x$. $D(f, O) = 2$, atteint en $x = 0$ ou $x = 1$.

Deuxième partie

8 – On sait que la valeur absolue de l'intégrale d'une fonction est majorée par l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction.
D'où :

$$\left|\int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt\right| \leq \int_U \left|f(t) - g(t)\right| dt$$

Soit M = D(f, g) le sup sur U de $|f(t) - g(t)|$.

On a de façon évidente, en majorant $|f(t) - g(t)|$ par M dans la deuxième intégrale :

$$\left|\int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt\right| \leq M = D(f, g)$$

9 – $f_n(x) = (\sin n^2x) / n$

$D(f_n, O) = \text{Sup } |\sin n^2x| / n = 1 / n$ car le maximum en valeur absolue du numérateur est 1, atteint pour $x = \pi / 2n^2$ qui est bien dans U dès que n est supérieur ou égal à 2.

$f'_n(x) = n(\cos n^2x)$; le sup sur U de $n(\cos n^2x)$ est égal à n, atteint pour x = 0 ou π/n^2.

Troisième partie

11 – On remarque que $P_n(x) = \Sigma_k (-1)^k (x/2)^k$, où k varie de 0 à n et $x \in U$, n'est autre que la somme des n+1 premiers termes d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $-x/2$.

$P_n(x) = [1 - (-x/2)^{n+1}]/[1 + x/2]$

Donc un calcul élémentaire permet d'établir que:
$f(x) - P_n(x) = - (x/2)^{n+1}/ [1 + x/2]$

D'où : $|f(x) - P_n(x)| = (x/2)^{n+1}/ [1 + x/2]$, quantité notée d(x)

Le calcul de d'(x) montre que la dérivée de d(x) a le signe de x^n (n + 1 – nx/2), c'est-à-dire est positif ou nul sur U.
La fonction d(x) est donc croissante sur U, son maximum est ainsi atteint en x = 1 et :

$D(f, g) = (1/2)^{n+1}/(1 + ½) = 1 / (3.2^n)$.

12 a – Soit à établir l'égalité suivante :
(E) $e^x – P_n(x) = J(n, x)$
où J(n, x) est l'intégrale $\int_{[0,x]} [e^t (x–t)^n /n!]\, dt$

Faisons une intégration par parties pour calculer J(n, x) : on prend $u(t) = e^t$ et $v'(t) = (x–t)^n /n!$.

On obtient : $u'(t) = e^t$ et $v(t) = – (x–t)^{n+1} /(n+1)!$.

D'où :

$$J(n, x) = [– e^t (x–t)^{n+1} /(n+1)!]^x_0 + \int_{[0,x]} [e^t (x–t)^{n+1} /(n+1)!]\, dt$$

$$J(n, x) = x^{n+1} /(n+1)! + J(n+1, x)$$

De la relation précédente, on en déduit :

- L'égalité (E) est évidemment vérifiée pour n = 1
- Supposons que (E) soit vérifiée au niveau n. On a :

$$e^x – P_n(x) = J(n, x) = x^{n+1} /(n+1)! + J(n+1, x)$$

Or $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1} /(n+1)!$

D'où le résultat cherché :

$$e^x – P_{n+1}(x) = J(n+1, x)$$

12 b – On a :

$$|e^x – P_n(x)| = \left|\int_{[0,x]} e^t (x–t)^n /n!\, dt\right|$$

Or, $\forall\, t \in [0, x]$, $e^t \leq e$ (car $x \leq 1$), d'où :

$0 \leq e^t (x-t)^n /n! \leq e\, (x-t)^n /n!$

Par intégration :

$$0 \leq \int_{[0,x]} e^t (x-t)^n /n!_{]} \leq \int_{[0,x]} e\, (x-t)^n /n! = e[-(x-t)^{n+1} /(n+1)!]^x{}_0$$

$= e\, x^{n+1} /(n+1)!$

$\forall\, x \in U$, $\left| e^x - P_n(x) \right| \leq e\, x^{n+1} /(n+1)! \leq e/(n+1)!$

Comme cette majoration est vraie quel que soit x, $D(f, P_n) \leq e/(n+1)!$

13 a – Les premiers polynômes de la suite sont :

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = 3\, P_1(x/3) - 4\, (P_1(x/3))^3 = x - 4\, x^3/27$

De même :

$P_3(x) = 3\, P_2(x/3) - 4\, (P_2(x/3))^3 = x - 40\, x^3/27 + 16\, x^5/3^7 - 64\, x^7/3^{12} + 256\, x^9/3^{18}$

13 b – $T(x) = 3x - 4\, x^3$ définie pour x entre –1 et +1 (intervalle noté A)

On remarque immédiatement que la récurrence sur les polynômes s'écrit :
$P_{n+1}(x) = T(P_n(x/3))$

Un calcul élémentaire montre que T' est négative entre – 1 et – ½, positive entre – ½ et ½ et négative entre ½ et 1. L'application T est donc décroissante de 1 à – 1 entre – 1 et – ½, croissante de – 1 à 1 entre – ½ et ½ et à nouveau décroissante de 1 à – 1 entre ½ et 1.

On constate donc que $\forall\, x \in A$, $T(x) \in A$.

On montre en outre que T'' est positive entre – 1 et 0, négative entre 0 et 1, et donc T' croit de –9 à 3 entre – 1 et 0 puis décroit de 3 à – 9 entre 0 et 1.

Il s'en suit que $\forall\, x \in A$, $\left| T'(x) \right| \leq 9$.

D'après la formule des accroissements finis, on a :

$T(u) - T(v) = (u - v)\, T'(w)$, w entre u et v, d'où :

$|T(u) - T(v)| = |u - v|\,|T'(w)|$

En majorant $|T'(w)|$ par 9, on obtient :

$$\forall\, u, v \in A \quad |T(u) - T(v)| \leq 9\,|u - v|$$

13 c – Calcul classique en écrivant sin (2a + a) = sin 2a cosa + cos 2a sin a
En remplaçant sin2a par 2sina cosa et cos2a par cos²a – sin²a, on a (en notant sina = S et cosa = C) :

$\sin 3a = 2S(1 - S^2) + S(1 - 2S^2) = 3S - 4S^3$

On remarque immédiatement que $\sin x = T(\sin(x/3))$.

13 d – Exercice classique ; il suffit d'étudier sur U les variations des fonctions intermédiaires $u(x) = x - \sin x$ et $v(x) = x^3/6 - x + \sin x$ pour obtenir la double inégalité recherchée :

$$0 \leq x - \sin x \leq x^3/6$$

13 e – Procédons par récurrence :

- Pour n = 1, on a bien sûr $P_1(x) \in A$ puisque $P_1(x) = x$, et $|P_1(x) - \sin x| \leq x^3 / 6$, d'après les inégalités de la sous-question 13d.

- Supposons la propriété vérifiée au rang n.

Faisons intervenir l'application T.

On a remarqué précédemment que $P_{n+1}(x) = T(P_n(x/3))$. Or puisque $P_n(x/3) \in A$, $T(P_n(x/3)) \in A$ d'après l'étude de l'application T à la sous-question 13b.

De plus, $\sin x = T(\sin(x/3))$, et donc :

$|P_{n+1}(x) - \sin x| = |T(P_n(x/3)) - T(\sin(x/3))| \leq 9\,|P_n(x/3) - \sin(x/3)| \leq 9\,(x/3)^3 / (2.3^n) =$
$= x^3 / (2.3^{n+1})$