ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée d'un seul problème, présenté en trois parties.

Dans tout le problème, F désigne l'ensemble des applications continues de U dans R, où U est l'intervalle [0, 1] et R l'ensemble des nombres réels.

Première partie

On définit sur $F \times F$ l'application D par :

$$\text{Pour } f, g \in F,\ D(f, g) = \underset{x \in U}{Sup}\left(\left|f(x) - g(x)\right|\right)$$

Cette définition est licite car la fonction f – g étant continue sur le segment U, elle est bien bornée sur U.

❶ Si f et g $\in$ F, que signifie D(f, g) = 0 ?

❷ Montrer que D est symétrique, c'est-à-dire que D(f, g) = D(g, f), $\forall$ f et g $\in$ F

❸ Montrer que D vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall\ f, g, h \in F, \qquad D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g)$$

❹ On définit les fonctions f et g suivantes, pour $x \in U$: $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Etablir que $D(f, g) = 1/4$. Tracer les graphes de f et g et représenter graphiquement D(f, g).

❺ Tracer les graphes des fonctions $f(x) = |x - 1/2|$ et $g(x) = 1$; représenter D(f, g) et calculer D(f, g).

❻ Calculer D(f, g) pour les fonctions $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g(x) = \sin(\pi x)$.

❼ On note par O l'application nulle définie sur U = [0, 1] par : $\forall\ x \in U$, $O(x) = 0$. Donner un exemple de fonction f, qui ne soit pas un polynôme, telle que $D(f, O) = 2$.

Deuxième partie

❽ Montrer que :

$$\forall \text{ f et g} \in F,\quad \left| \int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt \right| \leq D(f, g)$$

le symbole $\int_U$ désignant simplement l'intégrale de 0 à 1.

❾ On définit sur U la suite de fonctions de F par $f_n(x) = (\sin n^2 x) / n$, où n appartient à l'ensemble N^* des nombres entiers strictement positifs.
O désignant, comme dans la question 7 de la première partie, l'application nulle, et f'_n la dérivée de f_n, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$D(f_n, O) = 1 / n \qquad \text{et} \qquad D(f'_n, O) = n$$

Troisième partie

On désire étudier, dans cette partie, la possibilité d'approximer une application f de F par une suite de polynômes P_n, l'approximation de f par P_n étant définie au sens suivant : $\lim_{n\to+\infty} D(f, P_n) = 0$.
Nous allons étudier successivement trois situations de ce type.

❶⓪ On note par f l'application de F définie par :

$$f(x) = 2/(2 + x)$$

Pour $n \in N^*$, on définit le polynôme P_n élément de F par :

$$P_n(x) = \Sigma_k (-1)^k (x/2)^k \qquad \text{où k varie de 0 à n et } x \in U$$

Etablir que $D(P_n, f) = 1 / (3.2^n)$

❶❶ On prend pour f la restriction à U = [0, 1] de la fonction exponentielle e^x, et on définit pour tout nombre entier n la suite de polynômes P_n de F par :

$$P_n(x) = \Sigma_k x^k / k! \qquad \text{où k varie de 0 à n et } x \in U$$

a) On veut établir que l'on a l'égalité (E) suivante :

$$\text{(E)} \quad e^x - P_n(x) = J(n, x)$$

où J(n, x) est l'intégrale $\int_{[0,x]} [e^t (x-t)^n /n!]\, dt$

Etablir une relation entre J(n, x) et J(n+1, x).
Démontrer ensuite par récurrence l'égalité (E).

b) Montrer que $e^t (x-t)^n$ est majoré par $e(x-t)^n$.

c) En déduire que $D(P_n, f) \le e/(n+1)!$

❶❷ Dans cette question, on prend pour f la restriction de la fonction sinus à l'intervalle U = [0, 1].
La suite P_n de polynômes de F est définie par récurrence de la façon suivante, pour tout $x \in U$:

$P_1(x) = x$

$P_{n+1}(x) = 3\, P_n(x/3) - 4\, [P_n(x/3)]^3$

a) Donner les formes explicites des polynômes $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

b)On note par A l'intervalle $[-1, +1]$ et on définit l'application T sur A par : $\forall x \in A$, $T(x) = 3x - 4x^3$. Etudier l'application T.

Montrer, en utilisant la formule des accroissements finis, que :

$$\forall\ u, v \in A \quad |T(u) - T(v)| \leq 9|u - v|$$

c)Etablir la formule trigonométrique : $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

d) Montrer que l'on a, pour tout $x \in U$: $0 \leq x - \sin x \leq x^3/6$

e) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in N^*$, on a :

$$\forall\ x \in U,\ P_n(x) \in A, \text{ et } |P_n(x) - \sin x| \leq x^3 / (2.3^n)$$