

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

La fonction f est définie pour $x \notin [-1, 1]$

On remarque que f est paire : il suffit donc de l'étudier sur $]1, +\infty[$ puis de faire une symétrie axiale par rapport à l'axe Oy pour avoir l'ensemble de la courbe.

f est continue, dérivable, et $f'(x) = 1 / x \ln x$ pour x supérieur à 1

Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$; en outre, comme $\ln x < x$, $f(x)/x$ est majoré par $\ln x/x$ et tend donc vers 0 quand x tend vers l'infini : branche parabolique $0x$.

Quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

La fonction f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e , et sa tangente en ce point a pour pente $1/e$.

Tangentes :

En A ($e, 0$), l'équation de la tangente $D(A)$ est $y = -1 + x/e$

En B ($-e, 0$), l'équation de la tangente $D(B)$ est $y = -1 - x/e$

$D(A)$ et $D(B)$ se coupent au point C d'abscisse 0 et d'ordonnée -1 .

Normales :

En A ($e, 0$), l'équation de la normale $\Delta(A)$ est $y = 1 - x/e$

En B ($-e, 0$), l'équation de la tangente $\Delta(B)$ est $y = 1 + x/e$

$\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ se coupent au point D d'abscisse 0 et d'ordonnée 1.

Le quadrilatère ADBC est un losange, de surface $2e$.

Problème n° 2

1) La fonction $f(x) = (4 + x^4)^{-1/2}$ est définie pour tout x réel. Elle est paire, ce qui permet de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

Sa dérivée f' , qui existe en tout point, est donnée par :

$f'(x) = -2x^3(4 + x^4)^{-7/2}$ est donc négative sur $\mathbb{R}^+$; f est donc décroissante de $f(0) = \frac{1}{2}$ à 0.

La tangente en $x = 0$ a une pente nulle, et est parallèle à l'axe horizontal.

2) Considérons la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

2.1) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, $F(x)$ existe pour tout réel x .

Concernant la parité de F , calculons $F(-x)$:

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t) dt$$

Faisons le changement de variable $u = -t$; comme f est paire, on en déduit immédiatement que F est impaire, $F(-x) = -F(x)$.

2.2) Puisque f est continue, elle admet une primitive notée H . Et $F(x) = H(2x) - H(x)$.

La dérivée de F est donc :

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2(4 + 16x^4)^{-1/2} - (4 + x^4)^{-1/2} = (1 + 4x^4)^{-1/2} - (4 + x^4)^{-1/2}$$

2.3) D'après la question 1, on sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$; et donc on a les inégalités $f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$ pour tout t entre x et $2x$.

Par définition de F , en intégrant entre x et $2x$ la double inégalité précédente, on obtient :

$$x f(2x) \leq F(x) \leq x f(x)$$

ou encore :

$$x \cdot (4 + 16x^4)^{-1/2} \leq F(x) \leq x \cdot (4 + x^4)^{-1/2}$$

Il est évident (comparer les puissances des termes de plus haut degré) que les quantités qui encadrent $F(x)$, respectivement $x \cdot (4 + 16x^4)^{-1/2}$ et $x \cdot (4 + x^4)^{-1/2}$, ont pour limite 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Il s'en suit que $F(x)$ tend également vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

3) Puisque F est impaire, étudions-la sur $\mathbb{R}^+$.

D'après l'expression de F' donnée à la question 2.2, en réduisant au même dénominateur et en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée du numérateur, on obtient :

$$F'(x) = (3 - 3x^4) (1 + 4x^4)^{-1/2} (4 + x^4)^{-1/2} [(4 + x^4)^{-1/2} + (1 + 4x^4)^{-1/2}]$$

Cela revient à dire que le signe de F' est celui de $(3 - 3x^4) = 3(1 - x^2)(1 + x^2)$

Comme F' est positive sur $[0, 1[$, nulle en 1, négative sur $]1, +\infty[$, F est donc croissante de 0 ($F(0) = 0$) à 1 puis décroissante de 1 à $+\infty$ (avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$).

En $x = 0$, la pente de la tangente est $F'(0) = \frac{1}{2}$.

4) Considérons la valeur absolue de $E(x)$; on a l'inégalité suivante pour tout x strictement positif :

$$|E(x)| \leq x \int_x^{2x} |f(t) - u(t)| dt$$

Calculons $|f(t) - u(t)|$; après mise au même dénominateur et simplification, on trouve :

$$|f(t) - u(t)| = \left| -4t^{-2} (4 + t^4)^{-1/2} [t^2 + (4 + t^4)^{1/2}]^{-1} \right|$$

Or on a les inégalités suivantes :

$$(4 + t^4)^{1/2} \geq t^2$$

$$[t^2 + (4 + t^4)^{1/2}] \geq 2t^2$$

$$\text{Et donc } t^2 (4 + t^4)^{1/2} [t^2 + (4 + t^4)^{1/2}] \geq 2t^6$$

La quantité $|f(t) - u(t)|$ est majorée par $2t^{-6}$, et on en déduit :

$$|E(x)| \leq x \int_x^{2x} 2t^{-6} dt$$

ou encore, après intégration :

$$|E(x)| \leq 31 x^{-4} / 80$$

Comme le majorant de $|E(x)|$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = 0$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Problème n° 3

1) La fonction f (impaire) peut être étudiée uniquement sur $\mathbb{R}^+$. Sa dérivée f' est donnée par $f'(x) = 1 + 3x^2$, donc strictement positive, ce qui entraîne que f est une application monotone strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Plus généralement, par symétrie, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction f admet donc une fonction inverse, ou réciproque, elle aussi monotone strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et impaire, traditionnellement notée f^{-1} , et qui sera notée par la suite g .

2) Soit x un réel tel que $f(x) = y$; puisque g est une bijection, on peut écrire $x = g(y)$, $y \in \mathbb{R}$; la relation définissant f devient alors :

$$f(g(y)) = g(y) + g^3(y) = y \quad \text{car } f \circ g = \text{identité}$$

3) Par construction de la fonction réciproque, le graphe de g est le symétrique de f par rapport à la première bissectrice.

4) On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; donc il s'en suit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après les résultats classiques, on a :

$$g'(x) = 1 / f'(g(x))$$

La dérivée de g est donc égale à :

$$g'(x) = 1 / [1 + 3 g^2(x)]$$

A propos des variations de g' , on peut avoir les éléments suivants :

- g' est strictement positive
- comme g est une fonction impaire, g' est une fonction paire
- g est strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}^+$, $1 + 3 g^2(x)$ est également strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}^+$, et par conséquent g' est strictement décroissante (et positive)
- comme g' est paire, g' est croissante sur $\mathbb{R}^-$.

Donc, de $-\infty$ à 0 , g' est croissante de $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = 0$ à $g'(0) = 1$, puis g' décroît sur $[0, +\infty[$ de $g'(0) = 1$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$.

5) Soit la fonction G définie par :

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt$$

Effectuons le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale. Les bornes de l'intégrale deviennent 0 et $g(x)$.

On a $dt = f'(u) du = (1 + 3u^2) du$ et $g(f(u)) = u$; d'où :

$$G(x) = \int_0^{g(x)} u (1 + 3u^2) du = [2 g^2(x) + 3 g^4(x)] / 4$$

Comme g est impaire, on voit immédiatement que G est paire (on va donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$), et, en outre, comme G est la primitive de g s'annulant en 0, on a $G' = g$.

On sait que g est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

On en déduit que G est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, allant de $G(0) = 0$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.