ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Problème n° 1

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$x \to f(x) = \ln(\ln |x|)$$

où ln est le symbole des logarithmes népériens.

Etudier les variations de f (domaine de définition, continuité, dérivation, comportement asymptotique, etc …) et tracer précisément son graphe.

Donner les équations des tangentes à f aux points A et B d'abscisses respectives e et – e, ainsi que les équations des normales à ces tangentes en A et en B.

Calculer la surface du quadrilatère formé par les deux tangentes et les deux normales.

Problème n° 2

On considère la fonction réelle f de la variable réelle définie par $f(x) = (4 + x^4)^{-1/2}$.

1) Etudier les variations et tracer le graphe de f.

2) On considère la fonction F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

En aucune manière il n'est demandé le calcul explicite de l'intégrale définissant F.

2.1) Donner l'ensemble de définition de F et étudier sa parité.

2.2) Calculer la dérivée de F après avoir justifié son existence.

2.3) Montrer que pour tout x positif ou nul, on a :

$$x.(4 + 16x^4)^{-1/2} \leq F(x) \leq x.(4 + x^4)^{-1/2}$$

En déduire la limite de F(x) quand x tend vers + ∞.

3) Donner le tableau de variations de F et tracer son graphe.

4) On note u(x) la fonction x^{-2}. On définit alors, pour $x > 0$, la quantité E(x) par :

$$E(x) = x \int_x^{2x} (f(t) - u(t))\,dt$$

Montrer que la limite de E(x) est 0 quand x tend vers + ∞.

Problème n° 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par la relation $f(x) = x + x^3$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque, que l'on notera par g.

2) Montrer que la fonction g vérifie, pour tout x, la relation :

$$g(x) + g^3(x) = x$$

3) Tracer le graphe de g.

4) Justifier précisément le fait que g soit dérivable. Donner l'expression de la dérivée g' en fonction de g. En déduire le tableau de variation de g'.

5) Soit G la fonction définie par :

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

Calculer G en fonction de g. Etudier alors les variations de la fonction G.