ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Préliminaires :

$a = (z + \bar{z})/2$

$b = (z - \bar{z})/2i = i(\bar{z} - z)/2$

$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$

$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})/2$

Première partie :

1) $f_n(0) = n$ et $g_n(0) = 0$

2) On a :

$S(x) = f_n(x) + i\, g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}$

En posant $e^{i2x} = a$, $S(x) = a + a^2 + \dots + a^n = a\,(1 - a^n)/(1 - a)$

$S(x) = e^{i2x}\,(1 - e^{i2xn})/(1 - e^{i2x})$

$= e^{i(n+1)x}\,(e^{inx} - e^{-inx})/(\, e^{ix} - e^{-ix}) = [\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x]\sin nx / \sin x$

$f_n(x)$ est la partie réelle de $S(x)$, égale à $\cos(n+1)x.\sin nx / \sin x$

D'après les formules élémentaires de trigonométrie,
$\cos a \sin b = [\sin(a + b) - \sin(a - b)]/2$

d'où le résultat :

$f_n(x) = [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x$

De même, $g_n(x)$ est la partie imaginaire de $S(x)$, d'où :

$g_n(x) = \sin(n+1)x \sin nx / \sin x = [\cos x - \cos(2n +1)x] / 2 \sin x$

3) α et β étant deux nombres réels, on considère la fonction $h(x)$ définie sur $[0 , \pi/2]$ par :

$h(x) = (\alpha x + \beta x^2) / \sin x \quad$ pour $0 < x \leq \pi/2$

$h(0) = \alpha$

h est le rapport de deux fonctions dérivables sur $]0 , \pi/2]$, donc est dérivable sur ce même intervalle.

En outre, on sait que sinx est équivalent à x quand x tend vers 0, et donc :
$\lim_{x\to 0} [h(x) - h(0)]/x = \beta$
La fonction h est dérivable à droite en 0, $h'(0) = \beta$.

Par suite, h est dérivable sur l'intervalle fermé $[0 , \pi/2]$.

Calcul de $h'(x)$ pour $x \in [0 , \pi/2]$:

$h'(0) = \beta$

Sur $]0 , \pi/2]$, $h'(x) = [(\alpha + 2\beta x)\sin x - (\alpha x + \beta x^2)\cos x]/\sin^2 x$

h' est le rapport de deux fonctions continues sur $]0 , \pi/2]$; elle est donc continue sur $]0 , \pi/2]$.
En outre, quand x tend vers 0, $h'(x) \approx [(\alpha + 2\beta x)x - (\alpha x + \beta x^2)1]/x^2 = \beta = h'(0)$

$\Rightarrow$ h' est continue sur $[0 , \pi/2]$.

4) Pour tout entier n strictement positif, on définit l'intégrale :

$H(n) = \int_{[0, \pi/2]} h(x) \sin nx \, dx$

a – h est continue sur $[0, \pi/2]$ car elle y est dérivable ; la fonction sin nx est également continue sur $[0, \pi/2]$, et donc h(x) sin nx est continue sur $[0, \pi/2]$.
Par conséquent, l'intégrale H(n) existe.

b – Intégrons par parties en posant u(x) = h(x) et v'(x) = sin nx
u'(x) = h'(x) et v(x) = – cos nx/n

On obtient :

$$H(n) = [-h(x)\cos nx/n]_{[0,\pi/2]} + \int_{[0,\pi/2]} h'(x) \cos nx/n \, dx$$

D'où $nH(n) = h(0) - h(\pi/2)\cos n\pi/2 + \int_{[0,\pi/2]} h'(x) \cos nx \, dx$

En passant aux valeurs absolues et en majorant les cosinus par 1 :

$|H(n)| \leq [|h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0,\pi/2]} |h'(x)| dx] / n$

On pose $K = |h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0,\pi/2]} |h'(x)| dx$

K est bien indépendant de n et vérifie $|H(n)| \leq K/n$.

On en déduit que la limite de H(n) est 0 quand n tend vers $+\infty$.

Deuxième partie :

5) On note par $J(k ; \alpha, \beta)$ l'intégrale suivante :

$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0,\pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$

Procédons à une première intégration par parties :

$u'(x) = \cos 2kx$

$u(x) = \sin 2kx / 2k$

$v(x) = \alpha x + \beta x^2$

$v'(x) = \alpha + 2\beta x$

$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0,\pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$
$= [(\alpha x + \beta x^2) \sin 2kx / 2k]_{[0,\pi/2]} - \int_{[0,\pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx/2k \, dx$

d'où :

$J(k\ ;\ \alpha, \beta) = -\left(\int_{[0,\ \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx\, dx\right)/\ 2k$

Procédons à une deuxième intégration par parties :

$u'(x) = \sin 2kx$

$u(x) = -\cos 2kx\ /\ 2k$

$v(x) = \alpha + 2\beta x$

$v'(x) = 2\beta$

Il s'en suit :

$J(k\ ;\ \alpha, \beta) = -\left(\int_{[0,\ \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx\, dx\right)/\ 2k$

$= -\left[-\left[(\alpha + 2\beta x) \cos 2kx\ /\ 2k\right]_{[0,\ \pi/2]} + \int_{[0,\ \pi/2]} 2\beta \cos 2kx/2k\, dx\right]/2k$

$= [(-1)^k(\alpha + \beta\pi) - \alpha]/4k^2$

6) On choisit α et β pour que $(\alpha + \beta\pi) = 0$ et $-\alpha = 1$, ce qui conduit à prendre $\alpha^* = -1$ et $\beta^* = 1/\pi$.

On a alors : $J(k\ ;\ \alpha^*, \beta^*)) = 1/\ 4k^2$

7) $u_n = \Sigma_k\ 4\ J(k\ ;\ \alpha^*, \beta^*) = 4\ \Sigma_k \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \cos 2kx\, dx$

$= 4 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ \Sigma_k \cos 2kx\, dx$

$= 4 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ f_n(x)\, dx$

8) On remplace $f_n(x)$ par l'expression établie à la question 2 de la première partie.

$u_n = 4 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ [\sin (2n+1)x - \sin x]\ /\ 2 \sin x\, dx$

On en déduit :

$u_n = 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ [\sin (2n+1)x/\sin x]\, dx\ - 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, dx$

$u_n = 2 \int_{[0,\ \pi/2]} h^*(x) \sin (2n+1)x\, dx\ - 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, dx$

où h^* désigne la fonction h introduite à la première partie avec les valeurs (α^*, β^*) pour (α, β).

On a donc, compte tenu de la définition de H (question 4, première partie) :

$u_n = 2\ H(2n+1) \ - 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ dx$

Un calcul élémentaire permet d'établir que $- 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ dx = \pi^2/6$

9) Comme on sait (question 4, première partie) que $\lim\limits_{n \to +\infty} H(2n+1) = 0$, il s'en suit :

$U = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe et est égale à $\pi^2/6$.