ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Préliminaires :

- On rappelle que le nombre complexe z, $z \in C$, corps des complexes, peut s'écrire sous les formes algébrique et trigonométrique :

(1) $z = a + ib$, $a \in R$, $b \in R$

(2) $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho\, e^{i\theta}$

- Ecrire a et b en fonction de z et de son conjugué, noté $\overline{z}$
- Ecrire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

Première partie :

On considère, pour tout entier n strictement positif, les fonctions f_n et g_n d'une variable réelle définies, pour $0 \leq x \leq \pi/2$, par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$$

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin 2kx$$

1) Calculer $f_n(0)$ et $g_n(0)$

2) En écrivant $\cos 2kx + i \sin 2kx = e^{i2kx}$, montrer que $f_n(x)$ peut, pour $0 < x \leq \pi/2$, se mettre sous la forme :

$f_n(x) = [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x$

Donner une expression analogue pour $g_n(x)$.

3) α et β étant deux nombres réels, on considère la fonction h(x) définie sur $[0 , \pi/2]$ par :

$h(x) = (\alpha x + \beta x^2) / \sin x \quad$ pour $0 < x \leq \pi/2$

$h(0) = \alpha$

Montrer que h est dérivable sur $[0 , \pi/2]$. Calculer alors h'(x) pour $x \in [0 , \pi/2]$.

Montrer que h' est continue sur $[0 , \pi/2]$.

4) Pour tout entier n strictement positif, on définit l'intégrale :

$H(n) = \int_{[0, \pi/2]} h(x) \sin nx \, dx$

La notation $\int_{[0, \pi/2]}$ signifie simplement que l'intégrale est prise pour x allant de 0 à $\pi/2$.

a – Montrer que h(x) sin nx est continue sur $[0 , \pi/2]$. En déduire que H(n) existe.

b – En utilisant <u>une</u> intégration par parties, démontrer qu'il existe un réel K, ne dépendant pas de l'entier n, tel que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$|H(n)| \leq K/n$

En déduire la limite de H(n) quand n tend vers $+\infty$.

Deuxième partie :

On considère la suite définie, pour tout entier n strictement positif, par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$

On note par U la limite, si elle existe, de u_n quand n tend vers $+\infty$:

$U = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$

5) On note par $J(k ; \alpha, \beta)$ l'intégrale suivante :

$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0,\, \pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$

Montrer que :

$J(k ; \alpha, \beta)) = [(-1)^k (\alpha + \beta\pi) - \alpha] / 4k^2$

Remarque : pour établir ce résultat, on pourra procéder, par exemple, à deux intégrations par parties successives.

6) Déterminer un couple de valeurs (α^*,β^*) pour (α,β) tel que :

$J(k ; \alpha^*, \beta^*)) = 1/ 4k^2$

On conservera les valeurs $\alpha = \alpha^*$ et $\beta = \beta^*$ pour toute la suite du problème.

7) Montrer que

$u_n = 4 \int_{[0,\, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) f_n(x) \, dx$

8) Démontrer alors que u_n peut se mettre sous la forme :

$u_n = 2H(2n+1) - 2 \int_{[0,\, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \, dx$

où H est l'intégrale introduite à la question 4 de la première partie, la fonction h intervenant dans son expression étant prise avec les valeurs (α^*,β^*) des paramètres (α,β).

9) En déduire que $U = \lim_{n \to +\infty} u_n$ existe et donner la valeur de U.